

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Российский химико-технологический университет имени Д. И. Менделеева»

**Программа дополнительного профессионального образования
«Прикладные методы, средства и технологии искусственного интеллекта»**

Дисциплина «Методы и системы искусственного интеллекта в организациях химической
отрасли»

Лекция 2. Логические модели в системах, основанных на знаниях

Исчисление высказываний и предикатов.

Примеры разработки логических моделей смены
состояний химико-технологической системы

Ведущий преподаватель: кандидат технических наук,
доцент **Михайлова Павла Геннадьевна**

История

Логикой называется наука о законах и формах мышления. Основоположником ее является древнегреческий ученый Аристотель (IV век до н. э.).

Математическая логика, называемая также **теоретической** или **символической**, есть часть общей логики, в которой законы мышления выражаются формулами аналогично тому, как в алгебре выражаются правила действий с числами. Идея математической логики впервые была высказана немецким математиком и философом Лейбницем в XVII веке. Но систематическое её развитие началось только с середины XIX века с опубликования английским математиком Дж. Булем работы «Математический анализ логики» (1847 г.).

Новый этап в развитии математической логики начался в 20-х годах XX века, когда немецкий математик Д. Гильберт разработал теорию математического доказательства, теорию формального построения математических наук.

В настоящее время математическая логика имеет большое практическое значение, она широко применяется в вычислительной математике и в теории конечных автоматов.

Основные понятия

Алгебра логики (алгебра высказываний) — раздел математической логики, в котором изучаются логические операции над **высказываниями**.

Высказыванием является повествовательное предложение, которое формализует некоторое выражение мысли. Это утверждение, которому всегда можно поставить в соответствие одно из двух *логических значений*: ложь (0, ложно, false) или истина (1, истинно, true).

Под **высказыванием** понимается каждое **предложение**, относительно которого имеет смысл утверждать, **истинно оно или ложно**.

Простые высказывания в алгебре логики обозначаются заглавными латинскими буквами: A, B, C, D, ... и т.д. **Составные высказывания** на естественном языке образуются с помощью **союзов**. В алгебре логики эти союзы заменяются **логическими операциями**.

В соответствии с алгеброй логики любое **составное высказывание** можно рассматривать как **логическую функцию** $F(A, B, C, \dots)$, аргументами которой являются логические переменные A, B, C, ... (простые высказывания).

Логические операции

Действия, совершаемые над логическими переменными для получения определенных логических функций, называются логическими операциями. В алгебре логики используются следующие логические операции:

- **КОНЪЮНКЦИЯ** (логическое умножение («*»)). В естественных языках соответствует союзу **И**, в языках программирования обозначается **And**, в алгебре логики обозначается $\wedge$.

$$F = A \wedge B \wedge C \dots$$

- **ДИЗЪЮНКЦИЯ** (логическое сложение «+»). В естественных языках соответствует союзу **ИЛИ**, в языках программирования обозначается **Or**, в алгебре логики обозначается $\vee$.

$$F = A \vee B \vee C \dots$$

- **ИНВЕРСИЯ** (логическое отрицание («-»)). В естественных языках соответствует словам **НЕВЕРНО**, **ЛОЖЬ** или частице **НЕ**, в языках программирования обозначается **Not**, в алгебре логики обозначается $\bar{A}$, $\neg$.

$$F = \bar{A}$$

- **ИМПЛИКАЦИЯ** (логическое следование). В естественных языках соответствует обороту речи, **ЕСЛИ..., ТО ...**, в языках программирования обозначается **If**, в алгебре логики обозначается $\rightarrow$.

$$F = A \rightarrow B$$

- **ЭКВИВАЛЕНЦИЯ** (логическая равнозначность). В естественных языках соответствует обороту речи **ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА**, в алгебре логики обозначается $\Leftrightarrow$ или $\equiv$.

$$F = A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow \dots$$



A=«казнить нельзя»
B=«помиловать»

Ложь (0, ложно, false)
Истина (1, истинно, true)

1. $A=1 \rightarrow B=1$
2. $A=0 \rightarrow B=0$



Таблица истинности

Таблица истинности - таблица, с помощью которой устанавливается **истинностное значение сложного высказывания** при данных **значениях** входящих в него **простых высказываний**.

В классической математической логике предполагается, что каждое простое (не содержащее логических операций) высказывание является либо истинным, либо ложным, но не тем и другим одновременно.

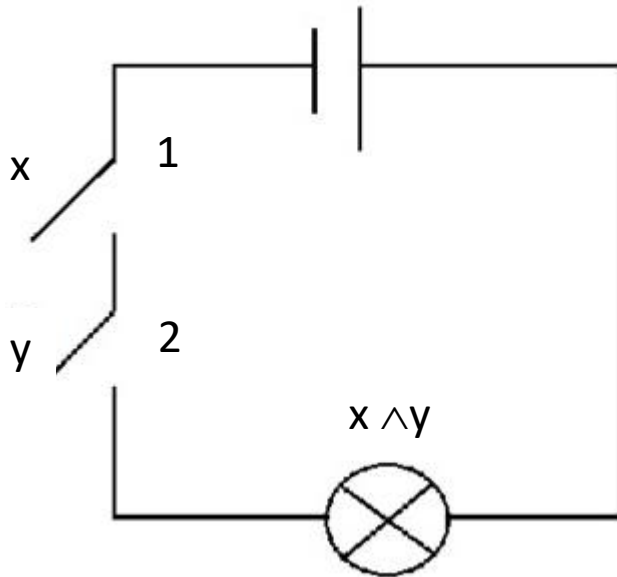
Когда с помощью логических операций мы соединяем простые высказывания в сложное, встает вопрос: при каких условиях сложное высказывание считается истинным, а при каких — ложным?

Для ответа на этот вопрос и служат таблицы истинности. Каждая логическая операция имеет свою таблицу, которая показывает, при каких наборах значений простых высказываний сложное высказывание с этой операцией будет истинным, а при каких — ложным.

КОНЪЮНКЦИЯ (логическое умножение)

«И», «And», «&», «*», « $\wedge$ »

КОНЪЮНКЦИЯ – функция 2 или нескольких переменных, эквивалентом которой является электрическая схема с последовательным соединением замыкателей (ключей)



Действительно, схема, состоящая из двух последовательно соединенных контактов, пропускает ток тогда и только тогда, когда замкнуты оба контакта

x, y – состояния 1 и 2 ключей

Если ключ замкнут, то $x, y = 1$

Если ключ разомкнут, то $x, y = 0$

Таблица истинности

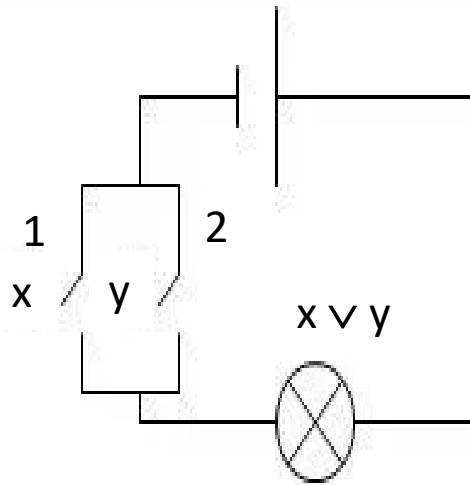
x	y	$x \wedge y$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Конъюнкцией двух высказываний x и y называется новое **высказывание** $x \wedge y$, которое считается истинным в том и только том случае, когда оба высказывания являются истинными, и ложным во всех остальных случаях

ДИЗЬЮНКЦИЯ (логическое сложение)

«ИЛИ», «Or», «+», « $\vee$ »

ДИЗЬЮНКЦИЯ – функция 2 или нескольких переменных, эквивалентом которой является электрическая схема с параллельным соединением замыкателей (ключей)



Схема, состоящая из 2 параллельно соединенных контактов пропускает ток, когда хотя бы 1 из контактов замкнут

x, y – состояния 1 и 2 ключей

Если ключ замкнут, то $x, y = 1$

Если ключ разомкнут, то $x, y = 0$

Таблица истинности

x	y	$x \vee y$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Дизьюнкцией двух высказываний x и y называется новое **высказывание** $x \vee y$, которое считается истинным, когда хотя бы одно из высказываний является истинным, и ложным, когда оба ложны

ИНВЕРСИЯ (логическое отрицание)

«НЕ», «Not», «—», « $\bar{A}$ », « $\neg$ », « $\neg$ »

ИНВЕРСИЯ – функция, которая меняет значение своего аргумента на противоположное.

Функция одного аргумента.

Отрицанием высказывания x называется новое **высказывание** $\bar{x}$, которое считается **истинным**, если x **ложно**, и **ложным**, если x **истинно**.

Таблица истинности

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

ЭКВИВАЛЕНЦИЯ

(логическая равнозначность)

Отношение эквивалентности удовлетворяет следующим свойствам:

- $x = x$ – рефлексивность;
- если $x = y$, то $y = x$ – симметричность;
- если $x = y$ и $y = z$, то $x = z$ – транзитивность.

Из отношения эквивалентности следует принцип **подстановки**: если $x=y$, то в любой формуле, содержащей x , вместо x можно подставить y , и будет получена эквивалентная формула.

Функции, аксиомы и теоремы (законы) алгебры логики

Аксиомы алгебры логики

$$1. \left. \begin{array}{l} x = 0, \text{ если } x \neq 1 \\ x = 1, \text{ если } x \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$2. \left. \begin{array}{l} 1 \vee 1 = 1 \\ 0 \cdot 0 = 0 \end{array} \right\}$$

$$3. \left. \begin{array}{l} 0 \vee 0 = 0 \\ 1 \cdot 1 = 1 \end{array} \right\}$$

$$4. \left. \begin{array}{l} 0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \\ 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \end{array} \right\}$$

$$5. \left. \begin{array}{l} \overline{0} = 1 \\ \overline{1} = 0 \end{array} \right\}$$

Аксиома (1) утверждает, что в алгебре логики рассматриваются только двоичные переменные, аксиомы (2)-(4) определяют операции конъюнкции и дизъюнкции, а аксиома 5 – операцию отрицания.

Если в аксиомах (2)-(5), заданных парами утверждений, произвести взаимную замену операций дизъюнкции и конъюнкции, а также элементов 0 и 1, то из одного утверждения пары будет получено другое. Это свойство называется принципом **двойственности**.

Теоремы алгебры логики

1. Для одной переменной

1.1. Конъюнктивные теоремы

$$x \cdot 0 = 0$$

$$x \cdot 1 = x$$

$$x \cdot x = x$$

$$x \cdot \bar{x} = 0$$

x	$\bar{x}$	$x \cdot \bar{x}$
0	1	0
1	0	0

Теоремы алгебры логики

1. Для одной переменной

1.2. Дизъюнктивные теоремы

$$x \vee 0 = x$$

$$x \vee 1 = 1$$

$$x \vee x = x$$

$$x \vee \bar{x} = 1$$

x	$\bar{x}$	$x \vee \bar{x}$
0	1	1
1	0	1

Теоремы алгебры логики

2. Для нескольких переменных

2.1. Переместительный закон (закон коммутативности)

$$x + y = y + x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

2.2. Сочетательный закон (закон ассоциативности)

$$(x + y) + z = x + (y + z) = (x + z) + y$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot z) \cdot y$$

Теоремы алгебры логики

2. Для нескольких переменных

2.3. Распределительный закон (закон дистрибутивности)

2.3.1. Распределение конъюнкции относительно дизъюнкции

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

2.3.2. Распределение дизъюнкции относительно конъюнкции

$$x + y \cdot z = (x + y)(x + z)$$

$$(x + y)(x + z) = x * x + x * z + y * x + y * z = x + x * z + y * x + y * z = x(1 + z) + y * x + y * z =$$

$$x * 1 + y * x + y * z = x + y * x + y * z = x(1 + y) + y * z = x + y * z$$

2.3.2. Распределение дизъюнкции относительно конъюнкции. Доказательство

$$x + y \cdot z = (x + y)(x + z)$$

x	y	z	$y \cdot z$	$x + y \cdot z$	$x + y$	$x + z$	$(x + y)(x + z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Теоремы алгебры логики

2. Для нескольких переменных

2.4. Законы инверсии

2.4.1. Закон двойного отрицания

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Отрицание отрицания дает утверждение

2.4.2. Теоремы де Моргана

А) Инверсия дизъюнкции эквивалентна конъюнкции инверсий.

$$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y} \neq \overline{x} \cdot y$$

б) Инверсия конъюнкции эквивалентна дизъюнкции инверсий.

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y} \neq \overline{x + y}$$

А) Инверсия дизъюнкции эквивалентна конъюнкции инверсий. Доказательство

$$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \cdot \bar{y}$	$x + y$	$\overline{x + y}$	
0	0	1	1	1	0	1	
0	1	1	0	0	1	0	
1	0	0	1	0	1	0	
1	1	0	0	0	1	0	

Теоремы алгебры логики

2. Для нескольких переменных

2.5. Законы склеивания

2.5.1. Законы полного склеивания

a) $x \cdot y + x \cdot \bar{y} = x$

$$x(y + \bar{y}) = x \cdot 1 = x$$

b) $(x + y)(x + \bar{y}) = x$

$$\begin{aligned} (x + y)(x + \bar{y}) &= x \cdot x + x \cdot \bar{y} + y \cdot x + y \cdot \bar{y} = x + x \cdot \bar{y} + y \cdot x + 0 = x(1 + \bar{y}) + y \cdot x = \\ &= x + y \cdot x = x(1 + y) = x \end{aligned}$$

Теоремы алгебры логики

2. Для нескольких переменных

2.5. Законы склеивания

2.5.2. Законы неполного склеивания

$$a) \quad x \cdot y + x \cdot \bar{y} = x + x \cdot y + x \cdot \bar{y} = x$$

$$x + x \cdot y + x \cdot \bar{y} = x + x = x$$

$$b) \quad (x+y)(x+\bar{y}) = x(x+y)(x+\bar{y}) = x$$

$$x(x+y)(x+\bar{y}) = x * x = x$$

Теоремы алгебры логики

2. Для нескольких переменных

2.6. Законы поглощения

a) $x + x \cdot y = x$ $x(1 + y) = x * 1 = x$

b) $x(x + y) = x$ $x(x + y) = x * x + x * y = x + x * y = x(1 + y) = x$

c) $x(\bar{x} + y) = x \cdot y$ $x(\bar{x} + y) = x * \bar{x} + x * y = 0 + x * y = x * y$

d) $x + \bar{x}y = x + y$ $x + \bar{x}y = (x + \bar{x})(x + y) = 1 * (x + y) = x + y$

$$x + y \cdot z = (x + y)(x + z)$$

Исключающее «ИЛИ»

XOR, $\oplus$

Исключающее «ИЛИ» представляет собой функцию 2 или более переменных, принимающая на выходе **значение=1**, если **нечетное количество** аргументов этой функции **равны 1**, и 0 во всех остальных случаях.

$$\text{XOR}(x,y)=x \cdot \bar{y} + y \cdot \bar{x}$$

x	y	XOR(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Получение логической функции по таблице истинности

Алгоритм

1. Выбрать значения переменных, для которых значение функции равно 1
2. Записать функцию логического умножения всех переменных для каждой строки, где результат равен 1 (если значение переменной равно 0, то берется ее отрицание)
3. Логически сложить полученные выражения
4. Упростить полученное выражение

Задание				
x	y	z	F	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$
0	1	0	1	$\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$x \cdot \bar{y} \cdot z$
1	1	0	0	
1	1	1	0	

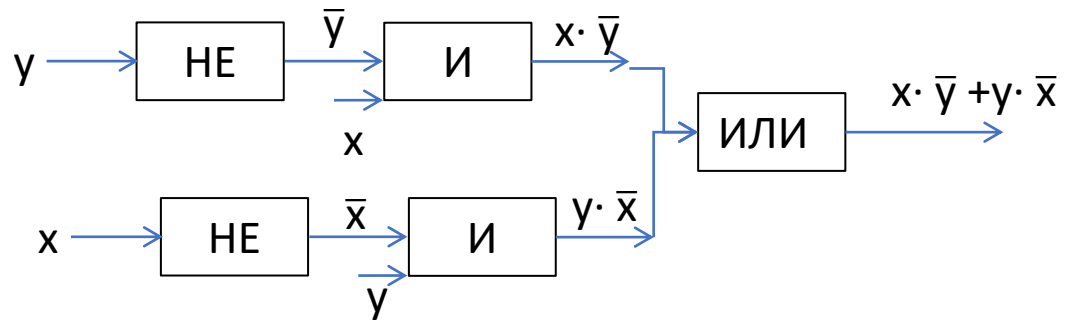
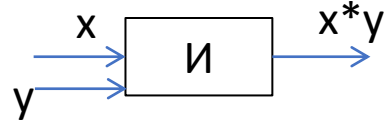
$$F(x,y,z) = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot z =$$

Построение логических схем по логической функции

Алгоритм

1. Определить число переменных
2. Определить количество логических операций и их порядок
3. Построить для каждой логической операции свою схему (если это возможно)
4. Объединить логические схемы в порядке выполнения логических операций

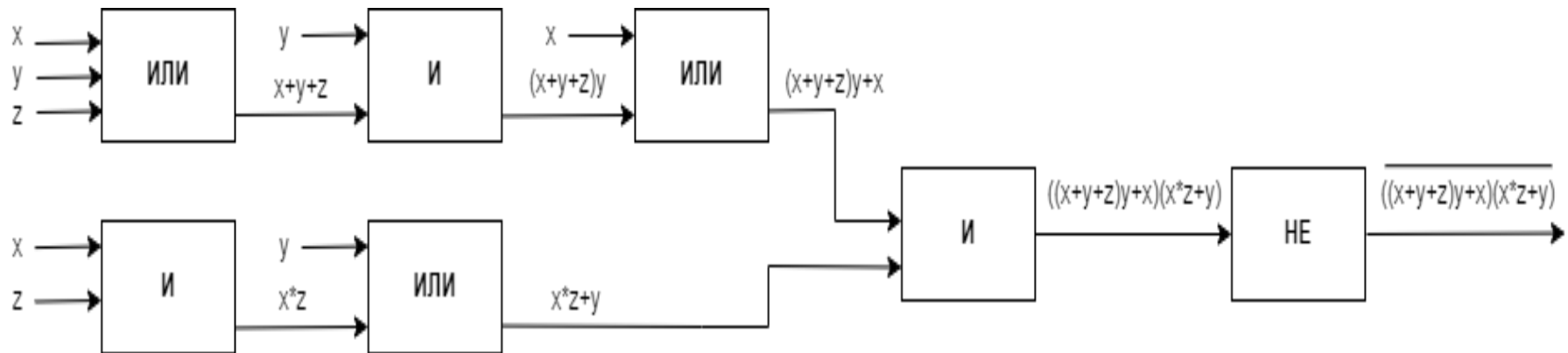
$$\text{XOR}(x,y)=x \cdot \bar{y} + y \cdot \bar{x}$$



Построение логической функции по логической схеме

Алгоритм

1. На выходе каждого логического элемента записать результат логической операции
2. Записать получившуюся формулу на выходе последнего элемента
3. Упростить получившуюся формулу



Пример разработки логических моделей смены состояний химико-технологической системы

Процесс смены функциональных состояний аппарата периодического действия можно изобразить в виде логической модели.

Если обозначить упорядоченную последовательность технологических операций

$$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\},$$

а множеств достижимых результирующих состояний аппарата периодического действия $S = \{S_0, S_1, \dots, S_{n-1}\}$,

где S_0 – начальное состояние аппарата, то каждое следующее состояние S_i – достигается как результат предыдущего состояния S_{i-1} и технологической операции P_i , поэтому процесс смены состояний аппарата формально можно записать в виде импликации:

$$M_i \equiv [(S_{i-1}=1) \wedge (P_i=1) \rightarrow (S_i=1)] ;$$

$$M_n \equiv [(S_{n-1}=1) \wedge (P_n=1) \rightarrow (S_0=1)] .$$

Пример

Пусть, например, определена следующая последовательность состояний аппарата:

S_0 – «аппарат пуст»;

S_1 – «аппарат заполнен реагентами»;

S_2 – «содержимое аппарата нагрето до заданной температуры»;

S_3 – «в аппарате завершена химическая реакция»;

S_4 – «продукт охлажден до требуемой температуры»;

Определена также последовательность технологических операций:

P_1 – «в аппарат загружаются реагенты»;

P_2 – «нагревание реакционной массы»;

P_3 – «химическая реакция»;

P_4 – «охлаждение реакционной массы»;

P_5 – «выгрузка продукта».

Тогда логическая модель смены состояний будет иметь вид:

$$M_1 \equiv [(S_0=1) \wedge (P_1=1) \rightarrow (S_1=1)]$$

$$M_2 \equiv [(S_1=1) \wedge (P_2=1) \rightarrow (S_2=1)]$$

$$M_3 \equiv [(S_2=1) \wedge (P_3=1) \rightarrow (S_3=1)]$$

$$M_4 \equiv [(S_3=1) \wedge (P_4=1) \rightarrow (S_4=1)]$$

$$M_5 \equiv [(S_4=1) \wedge (P_5=1) \rightarrow (S_0=1)]$$

Исчисление предикатов

Язык исчисления высказываний (алгебры логики) может оказаться недостаточным для описания некоторых достаточно сложных условий. Например, средствами логики высказываний невозможно выразить условие **«во всех аппаратах стадии j температура реакционной массы равна $t^{\circ}\text{C}$ »** или **«среди аппаратов химико-технологической системы имеется аппарат, температура в котором равна $t^{\circ}\text{C}$ »**.

Формализация этих и других аналогичных условий возможна на языке логики предикатов.

Исчисление предикатов

Логикой (или исчислением) предикатов первого порядка называется раздел математической логики, в котором кроме объектов логики высказываний определены также предметные переменные, предикаты и кванторы.

Предметной переменной логики предикатов называется переменная, принимающая значения, принадлежащие некоторой области переменных D , называемой предметной областью.

Предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — это логическая функция n переменных, которая в зависимости от значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ принимает два значения: Истина (Т) или Ложь (F). Обычно такого рода предикат называют n -местным.

Например, пусть условие «температура равна 40 °С» обозначено как предикат $P(t')$; тогда, если $t' = 40$ °С, $P(t')$ имеет значение «Истина», в противном случае — «Ложь».

Предикат $P(x)$, определенный на предметной области D , выделяет подмножество D_P , состоящее из элементов, для которых $P(x) = 1$.

В исчислении предикатов первого порядка для формализации условий «для всех x » или «существует x » над предметными переменными определена *кванторы* или **квантификаторы (все)общности $\forall$ и существования $\exists$** .

Исчисление предикатов

Предикат $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$, имеющий истинное значение и полученный при подстановке или конкретизации $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$, где a_i — объекты или константы, называется **фактом**.

Приведем примеры предикатов с различным числом аргументов.

1. Предикат нульместный, или простое высказывание: А — насос включен, В — насос исправен.

2. Предикат одноместный:

Температура выше нормы(t) — температура $t > 120^\circ\text{C}$,
аварийная(y) — ситуация y аварийная.

Эти предикаты становятся фактами при подстановке, например, $t = 130^\circ\text{C}$ и $y = \text{пожар}$:

Температура выше нормы(130°C) = Т, аварийная(пожар) = Т.

3. Предикат двухместный, выражающий отношение:

больше(x_1, y_1) — число x_1 больше, чем y_1 ,
взрывоопасная(x_2, y_2) — смесь x_2 и y_2 взрывоопасная.

Первый предикат приобретает значение Истина и является фактом при $x_1 = 2, y_1 = 1$. Второй предикат может стать фактом при такой подстановке: $x_2 = \text{водород}, y_2 = \text{кислород}$.

Полученные факты имеют вид: больше(2, 1), взрывоопасная(водород, кислород).

Ложными предикаты больше(x_1, y_1), взрывоопасная(x_2, y_2) будут соответственно при $x_1 = 2, y_1 = 3$ и $x_2 = \text{азот}, y_2 = \text{углекислый газ}$.

Исчисление предикатов

4. Предикат трехместный:

сумма(x, y, z) — z является суммой x и y .

Очевидно, что при $x = 2, y = 3, z = 5$ значение этого предиката истинное, получаем факт — сумма(2, 3, 5), а при $x = 5, y = 7, z = 3$ — ложное. Для предикатов справедливы все ранее рассмотренные логические операции и законы логики.

Рассмотрим процесс преобразования к предикатной форме предложения «ЕСЛИ Иван — отец Петра, И Петр — отец Павла, ТО Иван — дед Павла».

Введем три двухместных предиката-факта:

отец(Иван,Петр), отец(Петр, Павел), дед(Иван, Павел).

Предложение справедливо для любых имен людей, обозначенных переменными x, y, z и связанных такими родственными связями, т. е. предикаты можно записать как

отец(x, y), отец(y, z), дед(x, z), а предикатную форму предложения:

$\forall x \forall y \forall z (\text{отец}(x, y) \wedge \text{отец}(y, z)) \rightarrow \text{дед}(x, z)$,

в котором предикаты соединены логическими операциями $\wedge$ и $\rightarrow$. Здесь знак $\forall$ называется квантором, означающим "для всех" (например, $\forall x$ — для всех x).

Логические модели

Логические модели знаний основаны на исчислении высказываний и предикатов. Элементарному высказыванию соответствует операнд, а сложному — совокупность операндов, соединенных знаками логических операций. Для получения истинного высказывания из посылок или утверждений используются правила вывода **modus ponens**, **modus tollens** и **резолюции**.

Правило **modus ponens** (правило вывода).

ЕСЛИ из А следует В ($A \rightarrow B$) И А — истинно, ТО и В будет истинным. Здесь А и В — некоторые высказывания.

Правило вывода **modus ponens** проиллюстрируем на примере истинного умозаключения:

Посылка 1: ЕСЛИ в реакторе температура выше нормы (А), ТО ситуация аварийная(В).

Посылка 2: В реакторе температура выше нормы (А).

Заключение: Ситуация аварийная(В).

Правило **modus tollens** (рассуждение от противного) имеет следующий вид:

ЕСЛИ из А следует В ($A \rightarrow B$) и В — ложно, ТО и А будет ложным.

Приведем пример правила modus tollens.

Посылка 1: ЕСЛИ в реакторе температура выше нормы (А),ТО ситуация аварийная (В).

Посылка 2: Ситуация не аварийная($\bar{B}$).

Заключение: В реакторе температура не выше нормы ($\bar{A}$).

Правило вывода, аналогичное modus ponens, справедливо и для предикатов.

Логические модели

Рассмотрим вывод, дающий заключение на основании двух посылок.

Посылка 1: Все металлы электропроводны

Посылка 2: Медь - металл

Заключение: Медь электропроводна (1)

В рамках логики высказываний сделать такое заключение невозможно, поэтому необходимо разделить элементарные высказывания на более мелкие элементы. Так, предложение «Медь — металл» можно представить в виде предиката металл(x), у которого аргумент x = медь.

Из предложения «Все металлы электропроводны» вытекает другое частное высказывание "ЕСЛИ металл, ТО электропроводен", в котором определим два предиката: металл(x) и электропроводен(x), характеризующих некоторый металл с названием x и образующих логическую форму

металл(x) $\rightarrow$ электропроводен(x).

Предложение «Все металлы электропроводны» можно записать в следующей логической форме: x (металл(x) $\rightarrow$ электропроводен(x)). Тогда выражение (1) можно записать в виде логической формулы:

Посылка 1: $\forall x$ (металл(x) $\rightarrow$ электропроводен(x))

Посылка 2: металл(медь)

Заключение: электропроводен(медь).

Логические модели

В математической логике вывод можно получить, используя **правило резолюции**, вытекающее из понятия силлогизма.

Силлогизм — это дедуктивное умозаключение, в котором одно суждение является необходимым следствием двух других.

Рассмотрим силлогизм, заключающийся в том, что из $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow C$ вытекает $A \rightarrow C$. Примером такого силлогизма могут служить суждения:

ЕСЛИ Прогар труб змеевиков печей (A), ТО аварийная ситуация A-3.1.0(B),

ЕСЛИ аварийная ситуация A-3.1.0(B), ТО Остановить сырьевые насосы H-101/1,2,p(C),

из которых следует суждение

ЕСЛИ Прогар труб змеевиков печей (A), ТО Остановить сырьевые насосы H-101/1,2,p(C).

Тогда силлогизм можно записать в следующей логической форме:

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C), \quad (2),$$

где знак $\vdash$ означает следование.

Если в выражении (2) логические формулы в круглых скобках переписать в виде дизъюнктов (3):

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$$

$$(\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{B} \vee C) \vdash (\bar{A} \vee C) \quad (3)$$

то получим следующее правило: **в дизъюнктах, связанных конъюнкцией, удаляются одинаковые, но противоположные по значению операнды**

Выражения (2) и (3) можно также записать в предикатных формах:

$$\forall x\{A(x) \rightarrow B(x)\} \wedge \forall x\{B(x) \rightarrow C(x)\} \vdash \forall x\{A(x) \rightarrow C(x)\} \quad (4)$$

$$\forall x\{\bar{A}(x) \vee B(x)\} \wedge \forall x\{\bar{B}(x) \vee C(x)\} \vdash \forall x\{\bar{A}(x) \vee C(x)\} \quad (5)$$

Здесь x — переменная, принимающая некоторое значение из предметной области.

Логические модели

Перейдем к вопросам использования **правила резолюции** для вывода заключения. Пусть имеется заключение $Q(x)$ и набор дизъюнктов $D_1(x), D_2(x), \dots, D_m(x)$, которые в нашем случае равны

$$D_1(x) = \bar{A}(x) \vee B(x), D_2(x) = \bar{B}(x) \vee C(x)$$

К выбранным парам дизъюнктов $D_1(x), D_2(x), \dots, D_m(x)$, применяют правило резолюции (4) или (5) до тех пор, пока не выведется $Q(x)$, подтверждающее истинность заключения.

Пример. Решим простую задачу: «Если Ваня повсюду ходит за Петей, а Петя находится на речке, то где Ваня?».

Введем двухместный предикат **$H(x, y)$** , означающий, что мальчик x (Ваня или Петя) находится на месте y (речка, сад, лес и др.).

Эту задачу легко записать в предикатной форме:

$$\forall y \{ H(\text{Петя}, y) \rightarrow H(\text{Ваня}, y) \},$$

$H(\text{Петя}, \text{речка})$

На вопрос «Где Ваня?» (заключение **$H(\text{Ваня}, y)$**) можно дать ответ, если применить правило резолюции к факту $H(\text{Петя}, \text{речка})$ и дизъюнкту для $\bar{H}(\text{Петя}, y) \vee H(\text{Ваня}, y)$ некоторого значения y .

Построим процедуру опровержения и извлечем ответ на вопрос «Где Ваня?». Для этого запишем факт и дизъюнкт:

$$H(\text{Петя}, \text{речка}) \quad (6)$$

$$\bar{H}(\text{Петя}, y) \vee H(\text{Ваня}, y) \quad (7)$$

Выведем факт $H(\text{Ваня}, \text{речка})$ с помощью резолюции из выражений (6) и (7) при $y = \text{речка}$.

$$H(\text{Петя}, \text{речка}) \wedge \{ \bar{H}(\text{Петя}, \text{речка}) \vee H(\text{Ваня}, \text{речка}) \} \vdash H(\text{Ваня}, \text{речка})$$

Следовательно, получаем ответ: $H(\text{Ваня}, \text{речка})$ — «Ваня находится на речке».

Подстановка $y = \text{речка}$ в предикаты формулы (7) называется унификацией.

Преимущества логической модели знаний очевидны: это единственность и строгая обоснованность процедуры получения вывода. Однако в полной мере претворить в жизнь данный подход для решения реальных и достаточно сложных задач не представляется возможным. Поэтому были предприняты попытки перейти от формальной логики к так называемой «человеческой» логике здравого смысла (к модальной, многозначной и нечеткой логикам).