Нечеткие модели принятия решений при управлении химико-технологическими объектами

Бурляева Елена Валерьевна,
д.т.н., профессор
каф. Информационных систем в химической технологии,
МИРЭА – Российский технологический университет,
e-mail k2462112@yandex.ru

НЕЧЕТКИЕ ОТНОШЕНИЯ

Отношения на классических множествах

Декартово произведение n множеств $X_1, X_2, ..., X_n$ –
множество всех **упорядоченных** n-ок (кортежей),
каждый элемент которых берется из соответствующего множества.

$$X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n = \{(x_1,x_2,...,x_n) \mid x_1 \in X_1 \text{ и } x_2 \in X_2 \text{ и } ... \text{ и } x_n \in X_n\}$$

n-арное отношение $R(x_1,x_2,\dots,x_n)$ на множествах $X_1, X_2, ..., X_n$ –
подмножество декартова произведения множеств $X_1, X_2, ..., X_n$

Пример (3-арное отношение):

A = {Андреев, Борисов, Викторов}

B = {отлично, хорошо, удовл, неуд}

C = {физика, химия}

R – результаты сессии

R(a,b,c) =

{(Андреев, отлично, физика), (Борисов, отлично, физика),
(Викторов, удовл, физика), (Андреев, хорошо, химия),
(Борисов, отлично, химия), (Викторов, удовл, химия)}

Операции на отношениях

Объединение, пересечение и дополнение определены на отношениях так же, как на множествах

Отношение R^{-1} **обратно** к бинарному отношению R, определенному на множестве A,
если каждой упорядоченной паре, входящей в отношение R,
в отношении R^{-1} соответствует упорядоченная пара,
элементы которой переставлены:

$$R^{-1}(y,x) \Leftrightarrow R(x,y)$$

Композиция бинарных отношений R(x,y) и S(x,y) –
отношение **R°S(x,y)**, такое, что
для каждой упорядоченной пары (x,y), входящей в это отношение,
существует z такое, что R(x,z) и S(z,y).

Пример композиции отношений

S = {Андреев, Борисова, Васильева, Григорьев, Дмитриев, Егорова}
B = {x | x – целое число от 0 до 300}
P = {зачислен, не зачислен}
RE $\subseteq$ **S** $\otimes$ **B** – результаты ЕГЭ, задано таблично
RP $\subseteq$ **B** $\otimes$ **R** – проходной балл,
задано характеристическим свойством:
RP ={(b,p) | b≥241 & p="зачислен", b<241& p="не зачислен"}

RE

S	B
Андреев	243
Борисова	280
Васильева	275
Григорьев	261
Дмитриев	230
Егорова	238

RE ° RP

S	P
Андреев	зачислен
Борисова	зачислен
Васильева	зачислен
Григорьев	зачислен
Дмитриев	не зачислен
Егорова	не зачислен

Композиция **RE°RP** задает отношение «результаты зачисления»

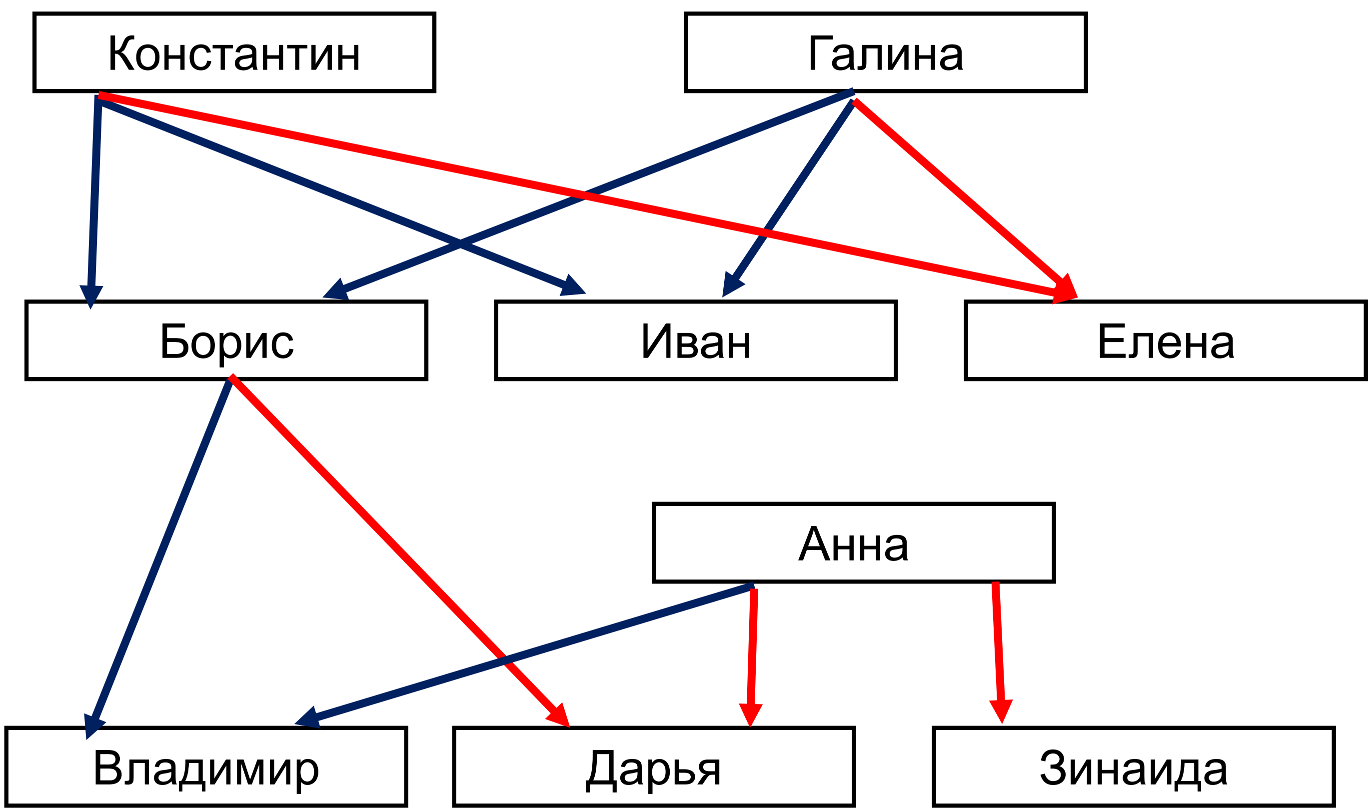
Пример: родственные отношения

Заданы отношения:

S(x,y) – «x является сыном y»,

D(x,y)- «x является дочерью y»

Зададим эти отношения в виде **графа**:



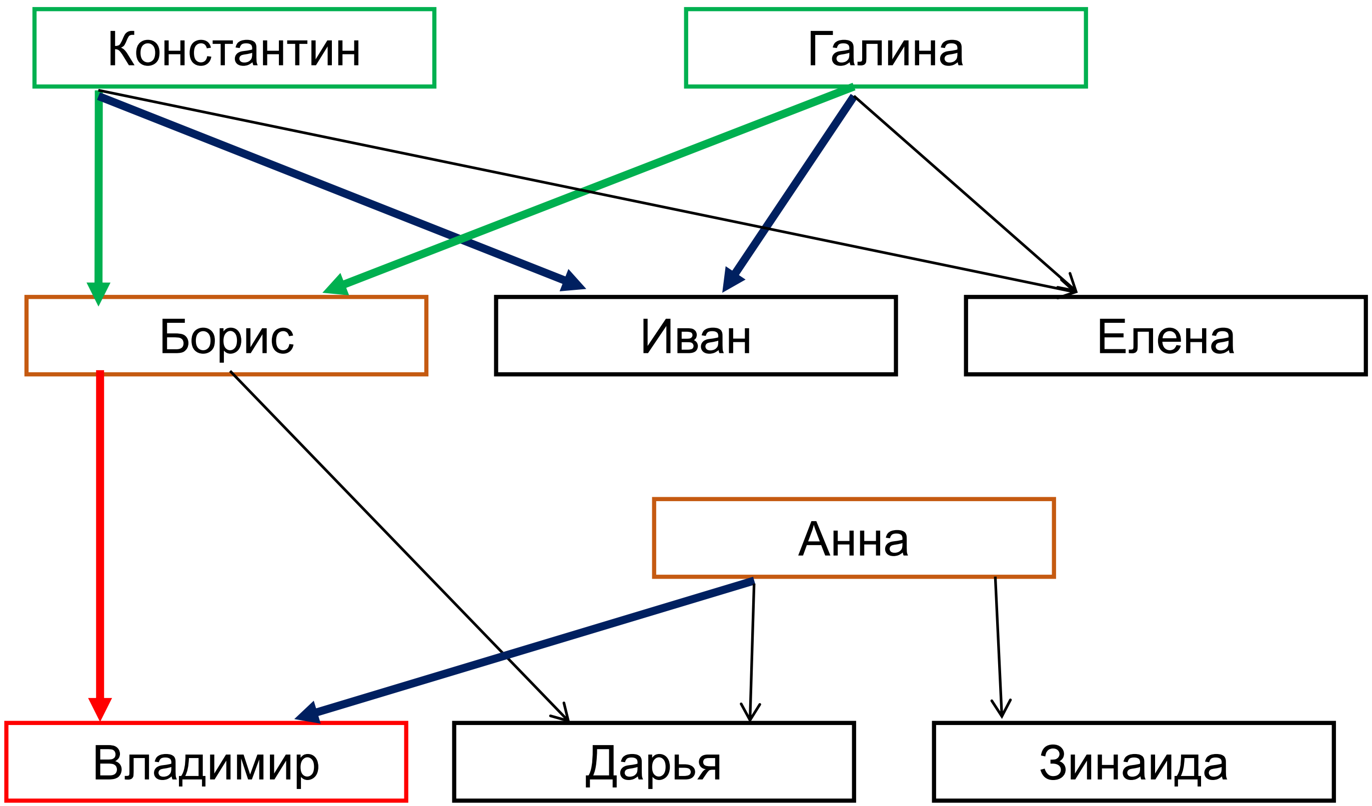
Пример: отношение «внук»

Определим отношение V(x,y) «x является внуком y»:

«x является внуком y, если существует z такой, что x является сыном z и z является сыном или дочерью y»

$S \cup D(z,y)$ – z является ребенком y

$V(x,y) = S(x,z) \circ (S \cup D)(z,y)$



V = {(Владимир, Константин), (Владимир, Галина)}

Рефлексивные отношения

Бинарные отношения

рефлексивные

для любого x R(x,x)

иррефлексивные

ни для какого x R(x,x)

Примеры:
«число x делится на число y»
«x учится в одной группе с y»

Примеры:
«число x больше числа y»,
«x является сыном y»

нерефлексивные

все остальные

Пример: «точка A симметрична точке B относительно оси x».
Точка симметрична сама себе, если лежит на оси x
и не симметрична сама себе во всех остальных случаях

Симметричные отношения

Бинарные отношения

симметричные

если R(x,y), то R(y,x)

Примеры:
«прямая x параллельна прямой y»,
«x учится в одной группе с y»

антисимметричные

если R(x,y) и R(y,x), то x=y

$R^{-1}=R$

Примеры:
«число x ≤ числа y»,
«x является сыном y»

несимметричные

все остальные

Примеры:
«x считает свои другом y»,
«x выше y», если существуют люди одного роста

Транзитивные отношения

Бинарные отношения

транзитивные

если R(x,y) и R(y,z),

то R(x,y)

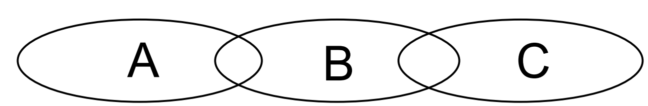
$R \circ R \subseteq R$

Примеры: равенство чисел,
«x выше ростом, чем y»

нетранзитивные

все остальные

Примеры:
«x является сыном y»,
«множество x имеет непустое пересечение с множеством y»



$A \cap B \neq \varnothing$; $B \cap C \neq \varnothing$; $A \cap C = \varnothing$

Отношения эквивалентности

R(x,y) является **отношением эквивалентности**, если оно:

- рефлексивно,
- симметрично,
- транзитивно.

Примеры:
«x равно y» на числах,
«x учится в одной группе с y»,
«x и y родились в одном и том же году»

Теорема Кантора

Задание отношения эквивалентности на множествах разбивает это множество на непересекающиеся подмножества, называемые **классами эквивалентности**

Пример:

Задание на множестве студентов отношения «студенты учатся в одной группе»: разбивает это множество на подмножества студентов-одногруппников

Отношения порядка

R(x,y) является **отношением нестрогого порядка**, если оно:

- рефлексивно,
- антисимметрично,
- транзитивно.

Примеры:

«число x меньше или равно числу y»,
«множество x включено в множество y»

R(x,y) является **отношением строгого порядка**, если оно:

- иррефлексивно
- антисимметрично,
- транзитивно.

Примеры:

«число x меньше числа y»,
«сотрудник x подчиняется сотруднику y»,
«x является предком y»

Отношения порядка

R(x,y) является **отношением нестрогого порядка**, если оно:

- рефлексивно,
- антисимметрично,
- транзитивно.

Примеры:

«число x меньше или равно числу y»,
«множество x включено в множество y»

R(x,y) является **отношением порядка**, если оно:

- иррефлексивно
- антисимметрично,
- транзитивно.

Примеры:

«число x меньше числа y»,
«сотрудник x подчиняется сотруднику y»,
«x является предком y»

Нечеткое отношение.
Матрица нечеткого отношения

Нечеткое отношение R(x,y) на базовых множествах A и B – совокупность **упорядоченных пар**, составленных из элементов декартова произведения множеств A и B и **степени принадлежности** этих элементов нечеткому отношению:

$$R(x,y) = \{((x,y), \mu_A(x,y)) | x \in A, y \in B, \mu_A(x,y) \in [0,1]\}$$

Пример «цвет x является оттенком цвета y»:

X = {Лимонный, Оранжевый, Розовый, Алый}

Y = {Желтый, Красный}

Классическое отношение:

{(Лимонный, Желтый), (Оранжевый, Желтый), (Оранжевый, Красный), (Розовый, Красный), (Алый, Красный)}

Матрица нечеткого отношения:

	Желтый	**Красный**
Лимонный	0,8	0
Оранжевый	0,4	0,6
Розовый	0	0,7
Алый	0	1

Особо выделяемые нечеткие отношения

Пустое отношение – отношение,
степень принадлежности которому любой пары (x,y) равна 0.

Универсальное отношение – отношение,
степень принадлежности которому любой пары (x,y) равна 1.

Единичное отношение (отношение равенства) - отношение,
степени принадлежности которому
пар, состоящих из одинаковых элементов, равны 1,
а всех остальных пар 0.

	a	b	c
a	1	0	0
b	0	1	0
c	0	0	1

Доминирование
и операции на нечетких отношениях

Нечеткое отношение R(x,y) **доминирует** отношение P(x,y), если степень принадлежности каждой пары (x,y) отношению R **больше или равна** степени принадлежности этой пары отношению P (обозначается $\mathbf{R \geq P}$).

Пересечение, объединение, дополнение определены так же, как для нечетких множеств.

Если отношение R(x,y) определено на базовом множестве A, т.е. $x \in A$, $y \in A$, то для него определена операция **обращения**:

$$R^{-1} = \{(x,y,\mu(x,y)) \mid x \in A,\ y \in A,\ \mu(x,y) = \mu_R(y,x)\}$$

Композиция бинарных отношений R(x,y) и S(x,y) – отношение $\mathbf{P = R \circ S(x,y)}$, такое, что для каждой упорядоченной пары (x,y) степень принадлежности отношению P вычисляется как

$$\mu_P(x,y) = \max_z(\min(\mu_R(x,z), \mu_S(z,y)))$$

Пример построения композиции

Исходные отношения:

	a	b	c
a	1	0,8	0,7
b	0,5	0,4	0,2
c	0,3	0,6	0,9

	a	b	c
a	0,5	0,4	0,9
b	0,2	0,1	0,3
c	0,6	0,9	1

Композиция:

	a	b	c
a	**0,6**	0,7	0,9
b	**0,5**	0,4	0,5
c	0,6	0,9	**0,9**

Расчет: $\mu_P(x,y) = \max_z(\min(\mu_R(x,z),\mu_S(z,y)))$

$\mu_P(a,a) = \max(\min(1;0,5); \min(0,8;0,2); \min(0,7;0,6)) = \max(0,5; 0,2; 0,6) =$ **0,6**

$\mu_P(b,a) = \max(\min(0,5;0,5); \min(0,4;0,2); \min(0,2;0,6)) = \max(0,5; 0,2; 0,2) =$ **0,5**

…

$\mu_P(c,c) = \max(\min(0,3;0,9); (\min(0,6;0,3); \min(0,9;1)) = \max(0,3; 0,3; 0,9) =$ **0,9**

Пример программы для построения композиции

Программа в математическом пакете SCILAB:

```
A=[1 0.8 0.7; 0.5 0.4 0.2; 0.3 0.6 0.9];
B=[0.5 0.4 0.9; 0.2 0.1 0.3; 0.6 0.9 1];
[n1 n2]=size(A);
[n3 n4]=size(B);
if n2==n3 then
   C=zeros(n1,n4);
   for i=1:n1
      for j=1:n4
        M=zeros(1,n2);
        for k=1:n2
          M(k)=min(A(i,k),B(k,j));
        end
        C(i,j)=max(M);
      end
   end
else
    disp("Размерность матриц не подходит для композиции")
end
disp(C)
```

Матрицы исходных отношений

Размерность матриц

Проверка размерности

Матрица требуемой размерности из 0

Циклы по строкам A и столбцам B

Расчет минимумов

Расчет максимума

вывод на экран матрицы композиции

Свойства нечетких отношений. Рефлексивность

Отношение R рефлексивно, если $\mu_R(x,x)=1$ для любого $x \in A$

Отношение R слабо рефлексивно,

если $\mu_R(x,y) \le \mu_R(x,x)$ для любых $x,y \in A$

Отношение R сильно рефлексивно,

если $\mu_R(x,x)=1$ и $\mu_R(x,y)<1$ для любых $x,y \in A$

Отношение R иррефлексивно, если $\mu_R(x,x)=0$ для любого $x \in A$

Примеры:

	a	b	c
a	1	0,3	0,8
b	0,5	1	0,7
c	0,6	0,2	1

Сильно рефлексивное отношение

	a	b	c
a	1	0,3	1
b	0,5	1	0,7
c	0,6	0,2	1

Рефлексивное, но не сильно рефлексивное

	a	b	c
a	1	0,3	0,4
b	0,5	0,8	0,7
c	0,6	0,2	0,9

Слабо рефлексивное отношение

	a	b	c
a	0	0,3	1
b	0,5	0	0,7
c	0,8	0,2	0

Иррефлексивное отношение

Свойства нечетких отношений. Симметричность

Отношение R симметрично,

если $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$ для любых $x \neq y \in A$

Отношение R антисимметрично,

если $\min(\mu_R(x,y);\mu_R(y,x))=0$ для любых $x \neq y \in A$

Примеры:

	a	b	c
a	1	0,3	0,8
b	0,3	0,9	0,1
c	0,8	0,1	1

симметричное отношение

	a	b	c
a	1	**0**	0,8
b	0,3	0,2	**0**
c	**0**	0,7	0,5

антисимметричное отношение

Свойства нечетких отношений. Транзитивность.

Отношение R транзитивно, если $R \circ R \subseteq R$

Примеры:

Отношение R

	a	b	c
a	1	0,6	0,7
b	0,4	0,9	0,4
c	0,8	0,6	0,7

$R \circ R$

	a	b	c
a	1	0,6	0,7
b	0,4	0,9	0,4
c	0,8	0,6	0,7

$R \circ R = R$ - транзитивное отношение

Отношение S

	a	b	c
a	1	**0,5**	0,7
b	0,4	0,9	0,4
c	0,8	0,6	0,7

$S \circ S$

	a	b	c
a	1	**0,6**	0,7
b	0,4	0,9	0,4
c	0,8	0,6	0,7

Расчет:

$\mu_P(a,a) = \max($
$\min(1;0,5);$
$\min(0,5;0,9);$
$\min(0,7;0,6)) =$
$\max(0,5;\ 0,5;\ 0,6) =$
0,6

$\mu_{S \circ S}(a,b) < \mu_S(a,b)$, **$S \circ S \not\subset S$ - нетранзитивное отношение**

Пример программы для проверки транзитивности

Программа в математическом пакете SCILAB:

```
A=[1 0.4 0.7; 0.4 0.9 0.4; 0.8 0.6 0.7];
[n1 n2]=size(A);
if n1==n2 then
   C=zeros(n1,n1);
   for i=1:n1
      for j=1:n1
        M=zeros(1,n1);
        for k=1:n1
          M(k)=min(A(i,k),A(k,j));
        end
        C(i,j)=max(M);
      end
   end
   else
     disp("матрица отношения не квадратная")
end
disp(C)
if C<=A then
      disp("отношение транзитивно")
   else
      disp("отношение не транзитивно")
end
```

Матрица отношения

Проверка размерности

Матрица квадратная

Сравнение матриц исходного отношения и композиции

Отношения сходства и подобия

Отношение называется отношением **сходства**, если оно

- **рефлексивно;**
- **симметрично.**

Отношение называется отношением **подобия**, если оно

- **рефлексивно;**
- **симметрично;**
- **транзитивно.**

Пример отношения подобия

	a	b	c	d
a	1	0,9	0,4	0,7
b	0,9	1	0,4	0,7
c	0,4	0,4	1	0,4
d	0,7	0,7	0,4	1

Свойства отношения:

- **рефлексивно,**
  так как $\mu_R(x,x)=1$ для любого $x \in A$;
- **симметрично,**
  так как $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$ для любых $x \neq y \in A$
- **транзитивно,**
  так как $R \circ R = R$

```
1.     0.9    0.4    0.7
0.9    1.     0.4    0.7
0.4    0.4    1.     0.4
0.7    0.7    0.4    1.
```

"отношение транзитивно"

Связь отношения подобия с отношением эквивалентности

Зададим число **$N \in [0,1]$.**
Рассмотрим **классическое** отношение P(x,y),
полученное из нечеткого отношения R(x,y),
включающее те пары (x,y), для которых **$\mu(x,y) \geq N$.**
Если R(x,y) является отношением **подобия**,
то P(x,y) является отношением **эквивалентности**.

Таким образом, нечеткое отношение подобия порождает **несколько** классических отношений эквивалентности **в зависимости от выбора числа N.**

Примеры отношений эквивалентности, полученных из отношения подобия

Нечеткое отношение подобия

	a	b	c	d
a	1	0,9	0,4	0,7
b	0,9	1	0,4	0,7
c	0,4	0,4	1	0,4
d	0,7	0,7	0,4	1

$0{,}7 < N1 \le 0{,}9$

$0{,}4 < N2 \le 0{,}7$

Отношение эквивалентности, полученное при N1

	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	1	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

3 класса эквивалентности

{a, b}, {c}, {d}

Отношение эквивалентности, полученное при N2

	a	b	c	d
a	1	1	0	1
b	1	1	0	1
c	0	0	1	0
d	1	1	0	1

2 класса эквивалентности

{a, b, d}, {c}