

Нечеткие модели принятия решений при управлении ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ объектами

Бурляева Елена Валерьевна,

д.т.н., профессор

каф. Информационных систем в химической технологии,

МИРЭА – Российский технологический университет,

e-mail k2462112@yandex.ru

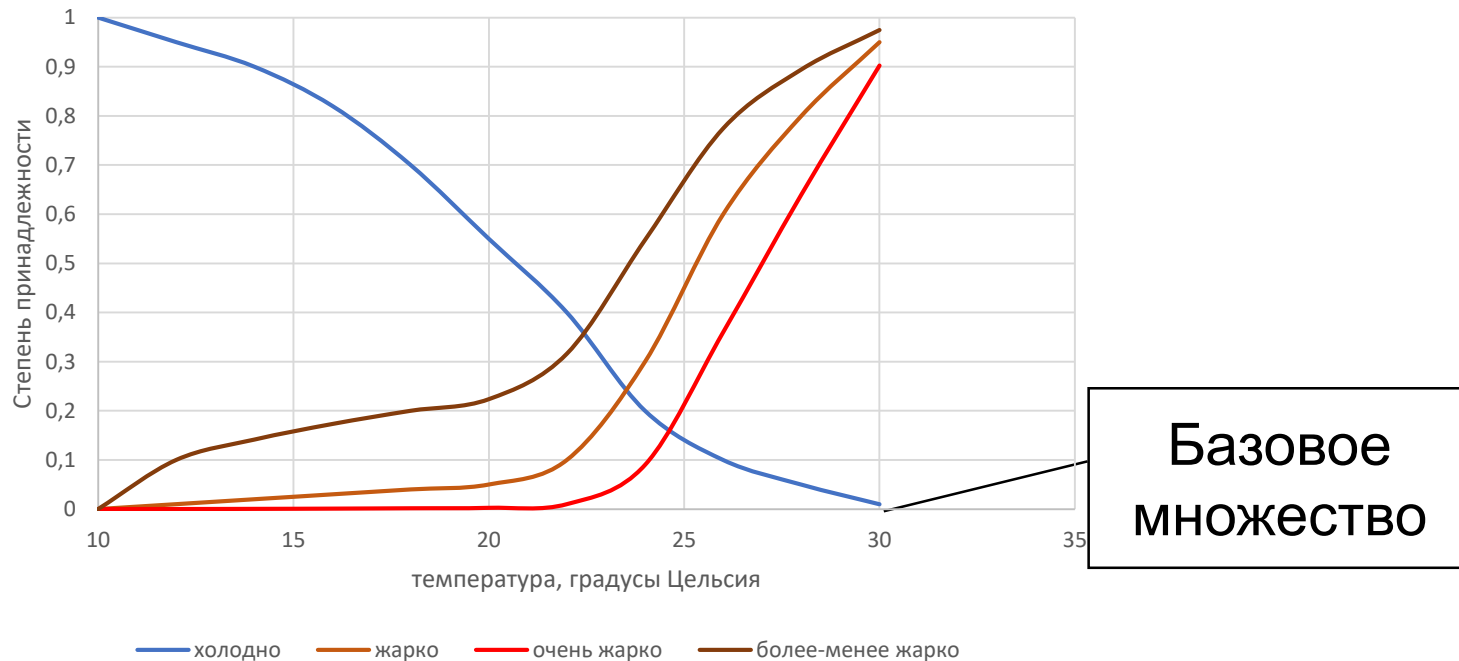
НЕЧЕТКИЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Лингвистическая переменная

Упорядоченный набор элементов:

Описание элемента	Пример
X - название	температура в помещении
U - базовое множество значений, на котором определены нечеткие множества	[10, 30] (градусы)
T - множество значений (термов, названий нечетких множеств)	• холодно, • жарко
функции принадлежности для каждого нечеткого множества	см. следующий слайд
G - множество квантификаторов, порождающих новые нечеткие множества из имеющихся	• не t - отрицание, $1-\mu_t(u)$ • очень t – концентрирование, $\mu_t^2(u)$ • более-менее t - размывание, $\sqrt{\mu_t(u)}$

Пример функций принадлежности для нечетких множеств - термов

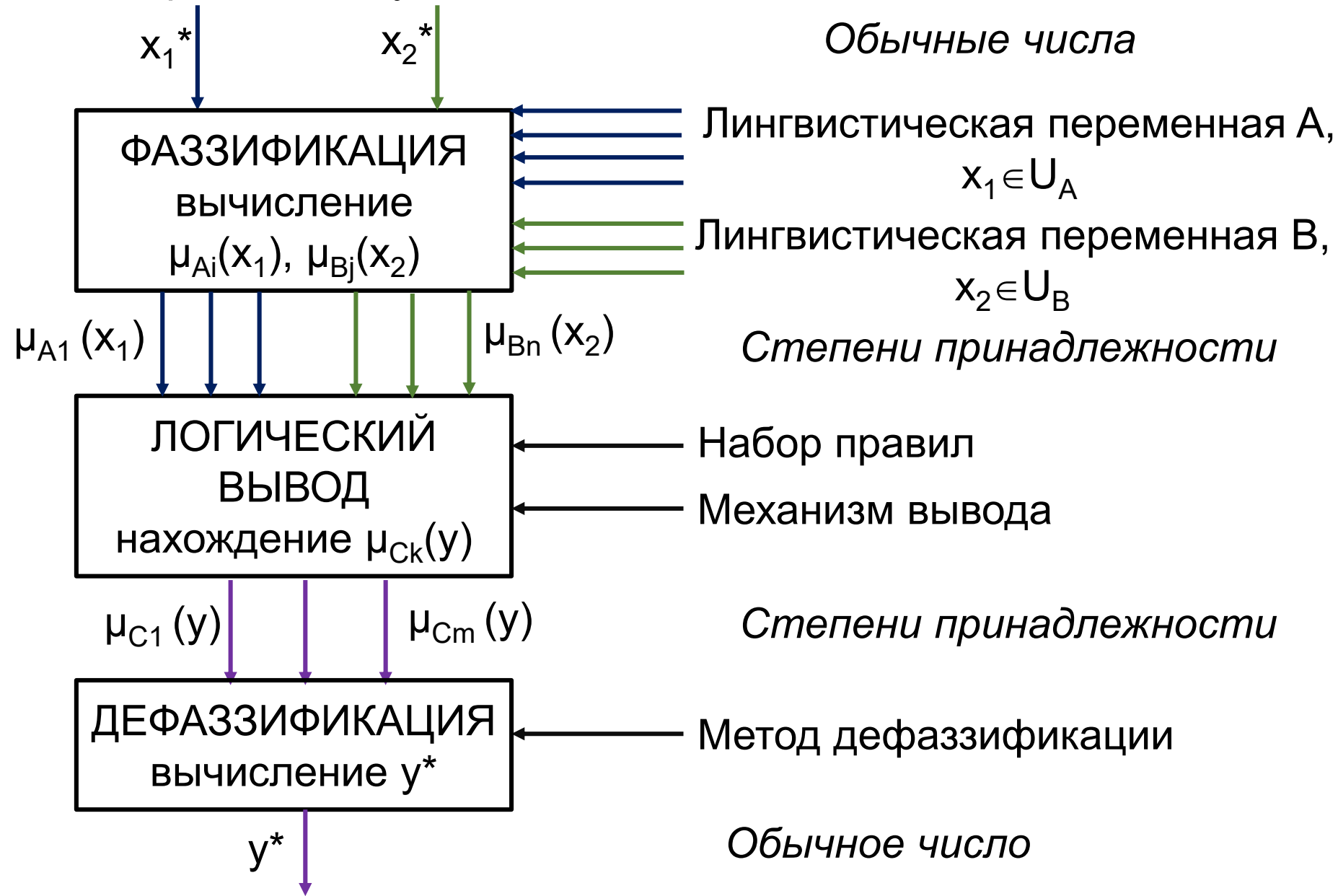


термы

нечеткие множества,
производные от
множества «жарко»

Структура нечеткой модели

Рассмотрим систему с 2 входами и 1 выходом.



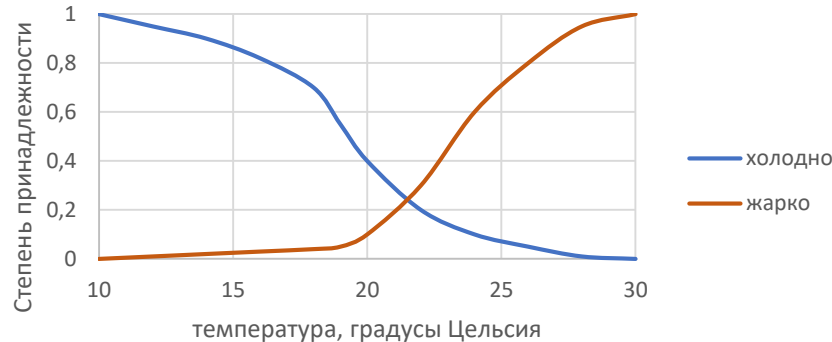
Пример входов нечеткой модели

Названия входных лингвистических переменных

- температура (градусы Цельсия, от 10 до 30),
- влажность воздуха (от 30 до 100%).

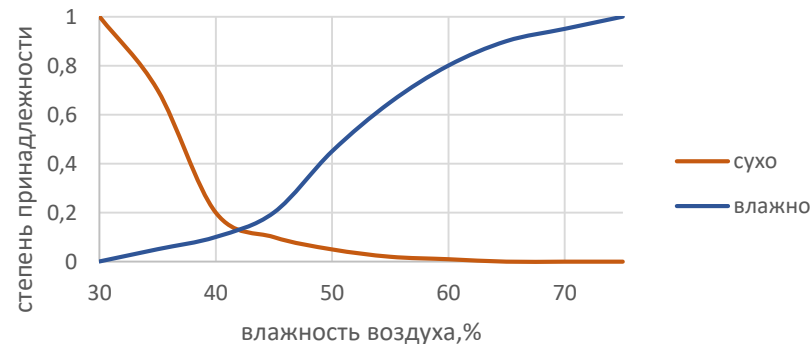
Множество значений и функции принадлежности для переменной «температура»

- холодно,
- жарко.



Множество значений и функции принадлежности для переменной «влажность воздуха»

- сухо,
- влажно.



Фаззификация. Пример фаззификации

Фаззификация – переход от числовых значений входов к лингвистическим переменным.

Результат: значения степеней принадлежности для всех нечетких множеств – термов.

Пример:

Числовые значения входов

- температура 17,
- влажность воздуха 35%

Степени принадлежности для переменной «температура»

- холодно 0,8,
- жарко 0,1.

Степени принадлежности для переменной «влажность»

- сухо 0,5,
- влажно 0,1.

Логический вывод.

Импликация в классической логике

Логический вывод – формализованное описание рассуждений при помощи средств математической логики

При логическом выводе имеющиеся факты о предметной области сопоставляются с **набором логических правил вида**
ЕСЛИ <посылка> ТО <заключение>

Основа логического вывода – логическая операция **импликации**.

A	B	$A \rightarrow B$
Истина	Истина	Истина
Истина	Ложь	Ложь
Ложь	Истина	Истина
Ложь	Ложь	Истина

В классической логике
если посылка является ложной,
то вся импликация истинна.

Нечеткая импликация

Обозначения:

X – базовое множество нечеткого множества A ,

Y – базовое множество нечеткого множества B .

Нечеткая импликация $A \rightarrow B$ – нечеткое отношение, определенное на декартовом произведении $X \otimes Y$.

$\mu_{A \rightarrow B}(x, y)$ вычисляется на основе $\mu_A(x)$ и $\mu_B(y)$:

Оператор импликации	Формула	} конъюнкция, а не импликация
Мамдани	$\min(\mu_A, \mu_B)$	
Ларсена	$\mu_A * \mu_B$	
Лукасевича	$\min(1, 1 - \mu_A + \mu_B)$	
Клини	$\max(1 - \mu_A, \mu_B)$	
Рейхенбаха	$1 - \mu_A + \mu_A * \mu_B$	
Гёделя	$\begin{cases} 1 & \text{для } \mu_A \leq \mu_B \\ \mu_B & \text{в противном случае} \end{cases}$	
Ягера	$\mu_A^{\mu_B}$	
Заде	$\max(1 - \mu_A, \min(\mu_A, \mu_B))$	

Требования к оператору импликации

1. антимонотонность по 1-му аргументу

если $\mu_A(x_1) \leq \mu_A(x_2)$, то $\mu_{A \rightarrow B}(x_1, y) \geq \mu_{A \rightarrow B}(x_2, y)$

2. монотонность по 2-му аргументу

если $\mu_B(y_1) \leq \mu_B(y_2)$, то $\mu_{A \rightarrow B}(x, y_1) \leq \mu_{A \rightarrow B}(x, y_2)$

3. доминирование по 0 (из лжи следует что угодно)

$$\mu_{A \rightarrow B}(0, y) = 1$$

4. нейтральность по 1

$$\mu_{A \rightarrow B}(1, y) = y$$

Для операторов Мамдани и Ларсена
выполняются требования 2 и 4,
остальные не выполняются.

Пример. Проверка требований для импликации Лукасевича

A – человек имеет высокий рост
B – человек носит обувь большого размера
 $A \rightarrow B$ – если человек имеет высокий рост, то он носит обувь большого размера.

Нечеткие множества A и B:

высокий рост		большой размер обуви	
рост, см	μ	размер	μ
170	0	42	0
175	0,1	43	0,1
180	0,4	44	0,5
185	0,5	45	0,8
190	0,7	46	1
195	0,9		
200	1		

Импликация Лукасевича

		размер обуви				
		0	0,1	0,5	0,8	1
		42	43	44	45	46
р о с т	0 170	1	1	1	1	1
	0,1 175	0,9	1	1	1	1
	0,4 180	0,6	0,7	1	1	1
	0,5 185	0,5	0,6	1	1	1
	0,7 190	0,3	0,4	0,8	1	1
	0,9 195	0,1	0,2	0,6	0,9	1
	1 200	0	0,1	0,5	0,8	1

Все 4 требования выполняются

Пример. Сравнение операторов Лукасевича и Заде

Импликация Лукасевича

Лукасевич, A→B		0	0,1	0,5	0,8	1
		42	43	44	45	46
0	170	1	1	1	1	1
0,1	175	0,9	1	1	1	1
0,4	180	0,6	0,7	1	1	1
0,5	185	0,5	0,6	1	1	1
0,7	190	0,3	0,4	0,8	1	1
0,9	195	0,1	0,2	0,6	0,9	1
1	200	0	0,1	0,5	0,8	1

Импликация Заде

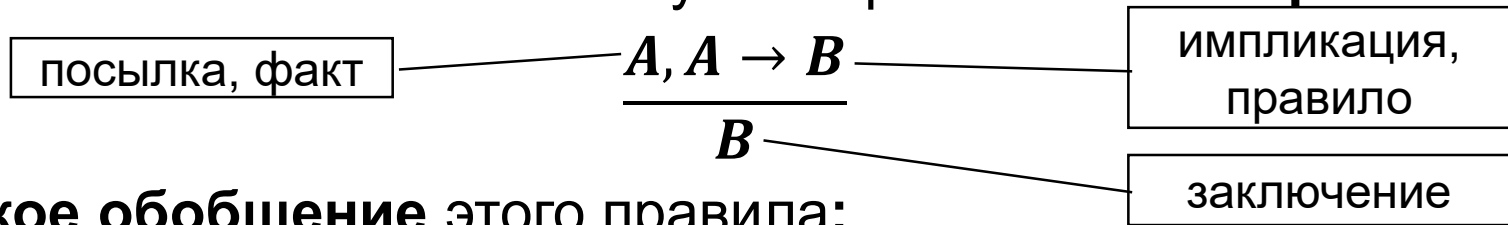
Заде, A→B		0	0,1	0,5	0,8	1
		42	43	44	45	46
0	170	1	1	1	1	1
0,1	175	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9
0,4	180	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
0,5	185	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
0,7	190	0,3	0,3	0,5	0,7	0,7
0,9	195	0,1	0,1	0,5	0,8	0,9
1	200	0	0,1	0,5	0,8	1

Требование	Импликация Лукасевича	Импликация Заде
АНТИМОНОТОННОСТЬ по 1-му аргументу (по столбцам)	да	нет
МОНОТОННОСТЬ по 2-му аргументу (по строкам)	да	да
доминирование по 0	да	да
нейтральность по 1	да	да

Логический вывод.

Нечеткие правила вывода

В классической логике используется правило **modus ponens**:



Нечеткое обобщение этого правила:

$$\frac{V = A', (V = A) \rightarrow (W = B)}{W = B'}$$

Здесь

A' – нечеткое множество, производное от A ,
с использованием квантификаторов (очень, более-менее и т.п.)

B' – нечеткое множество, производное от B .

Пример:

A' – человек имеет **очень** высокий рост,

$A \rightarrow B$ – если человек имеет высокий рост,

то он носит обувь большого размера,

B' – человек носит обувь **очень** большого размера.

Композиционное правило вывода

Для нечеткого правила

$$\frac{V=A', (V=A) \rightarrow (W=B)}{W=B'}$$

$V' = A' \circ (A \rightarrow B)$

Композиция
нечеткого множества A' и
нечеткого отношения $A \rightarrow B$

Пример:

A' – человек имеет *очень* высокий рост,
 $A \rightarrow B$ – если человек имеет высокий рост,
то он носит обувь большого размера,
 B' – человек носит обувь *очень* большого размера.

Нечеткие
множества
 A и A'

рост, см	μ	μ^2
170	0	0
175	0,1	0,01
180	0,4	0,16
185	0,5	0,25
190	0,7	0,49
195	0,9	0,81
200	1	1

Импликация Лукасевича,
нечеткое отношение R

Лукасевич, $A \rightarrow B$		0	0,1	0,5	0,8	1
		42	43	44	45	46
0	170	1	1	1	1	1
0,1	175	0,9	1	1	1	1
0,4	180	0,6	0,7	1	1	1
0,5	185	0,5	0,6	1	1	1
0,7	190	0,3	0,4	0,8	1	1
0,9	195	0,1	0,2	0,6	0,9	1
1	200	0	0,1	0,5	0,8	1

Нечеткие
множества
 B и B'

размер	μ	μ'
42	0	0,3
43	0,1	0,4
44	0,5	0,6
45	0,8	0,81
46	1	1

Проблема нечеткого вывода

большой

очень большой

размер обуви очень высокого человека

размер	μ	μ^2	μ'
42	0	0	0,3
43	0,1	0,01	0,4
44	0,5	0,25	0,6
45	0,8	0,64	0,81
46	1	1	1

Результат концентрирования **не совпадает**
с результатом логического вывода на основе роста:

- результаты, близкие к 1 (к истине), соответствуют семантике,
- результаты, близкие к 0 (к лжи), дают **неопределенные** значения (степень принадлежности близка к 0,5).

Аккумуляция правил

Аккумуляция – построение общего заключения по набору из нескольких правил

$$(V = A_i) \rightarrow (W = B_i)$$

Алгоритм аккумуляции:

1. По каждому правилу по известным $\mu_{A_i}(x)$ найти $\mu_{B_i}(y)$,
2. Вычислить $\max(\mu_{B_i}(y))$.

При наличии нескольких правил используют импликацию Мамдани или Ларсена.

Применение «правильных» операторов импликации, как правило, приводит к неинформативным результатам.

Пример аккумуляции (данные)

A1 – высокий рост, B1 – большой размер обуви,

A1→B1 – если человек имеет высокий рост,
то он носит обувь большого размера.

A2 – низкий рост, B2 – маленький размер обуви

A2→B2 – если человек имеет низкий рост,
то он носит обувь маленького размера.

Нечеткие множества:

	высокий	низкий			большой	маленький
рост, см	μ_1	μ_2		размер	μ_1	μ_2
170	0	1		42	0	1
175	0,1	0,8		43	0,1	0,6
180	0,4	0,5		44	0,5	0,4
185	0,5	0,2		45	0,8	0,2
190	0,7	0,1		46	1	0
195	0,9	0				
200	1	0				

Пример аккумуляции (правила)

Импликация Лукасевича

Лукасевич, A1→B1		0	0,1	0,5	0,8	1		Лукасевич, A2→B2		1	0,6	0,4	0,2	0
		42	43	44	45	46				42	43	44	45	46
0	170	1	1	1	1	1		1	170	1	0,6	0,4	0,2	0
0,1	175	0,9	1	1	1	1		0,8	175	1	0,8	0,6	0,4	0,2
0,4	180	0,6	0,7	1	1	1		0,5	180	1	1	0,9	0,7	0,5
0,5	185	0,5	0,6	1	1	1		0,2	185	1	1	1	1	0,8
0,7	190	0,3	0,4	0,8	1	1		0,1	190	1	1	1	1	0,9
0,9	195	0,1	0,2	0,6	0,9	1		0	195	1	1	1	1	1
1	200	0	0,1	0,5	0,8	1		0	200	1	1	1	1	1

При любых значениях переменных максимум будет равен 1.

Импликация Мамдани

		0	0,1	0,5	0,8	1					1	0,6	0,4	0,2	0
Мамдани, A1→B1		42	43	44	45	46			Мамдани, A2→B2		42	43	44	45	46
0	170	0	0	0	0	0			1	170	1	0,6	0,4	0,2	0
0,1	175	0	0,1	0,1	0,1	0,1			0,8	175	0,8	0,6	0,4	0,2	0
0,4	180	0	0,1	0,4	0,4	0,4			0,5	180	0,5	0,5	0,4	0,2	0
0,5	185	0	0,1	0,5	0,5	0,5			0,2	185	0,2	0,2	0,2	0,2	0
0,7	190	0	0,1	0,5	0,7	0,7			0,1	190	0,1	0,1	0,1	0,1	0
0,9	195	0	0,1	0,5	0,8	0,9			0	195	0	0	0	0	0
1	200	0	0,1	0,5	0,8	1			0	200	0	0	0	0	0

Построим нечеткое множество В для человека ростом 190 см:

	42	43	44	45	46
B1	0	0,1	0,5	0,7	0,7
B2	0,1	0,1	0,1	0,1	0
B	0,1	0,1	0,5	0,7	0,7

Дефаззификация. Методы дефаззификации

Дефаззификация – переход от нечеткого множества к числовому значению.

Методы дефаззификации:

- центр тяжести

$$G(B) = \frac{\sum_{i=1}^m i * \mu_B(i)}{\sum_{i=1}^m \mu_B(i)}$$

- центр площади

$$C(B) = k, \text{ такое что } \sum_{i=1}^k \mu_B(i) = \sum_{i=k}^m \mu_B(i)$$

- средний максимум

$$M(B) = \frac{1}{s} \sum i, \text{ таких что } \mu_B(i) = \max$$

- наименьший или наибольший максимумы

Дефаззификация. Пример

Нечеткое множество В

	42	43	44	45	46
В	0,1	0,1	0,5	0,7	0,7

- центр тяжести

$$\frac{42 * 0,1 + 43 * 0,1 + 44 * 0,5 + 45 * 0,7 + 46 * 0,7}{(0,1 + 0,1 + 0,5 + 0,7 + 0,7)} = 44,9 \approx 45$$

- центр площади

	42	43	44	45	46
В	0,1	0,1	0,5	0,7	0,7

Diagram illustrating the center of area calculation. The fuzzy set B is represented by a horizontal bar with segments corresponding to the values 42, 43, 44, 45, and 46. The membership degrees are 0,1, 0,1, 0,5, 0,7, and 0,7 respectively. The segments for 45 and 46 are highlighted in blue. A red box highlights the value 45. Brackets below the bar indicate the total width of the segments from 42 to 44 (0,3) and from 45 to 46 (0,7).

- средний максимум

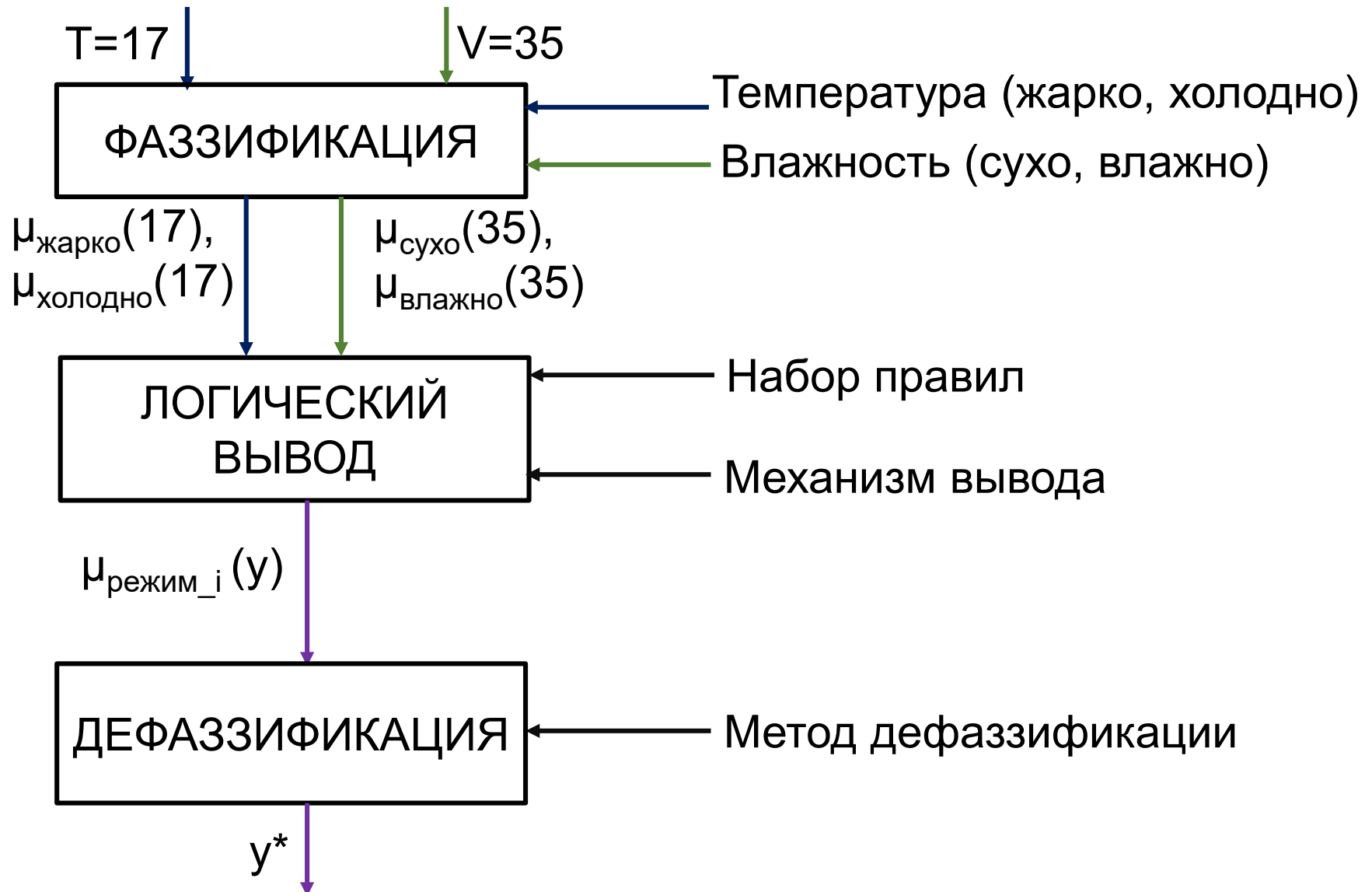
максимум степени принадлежности достигается при 45 и 46.
 $(45+46)/2=46$

- наименьший максимум 45
- наибольший максимум 46

Человек ростом 190 см носит 45 размер обуви.

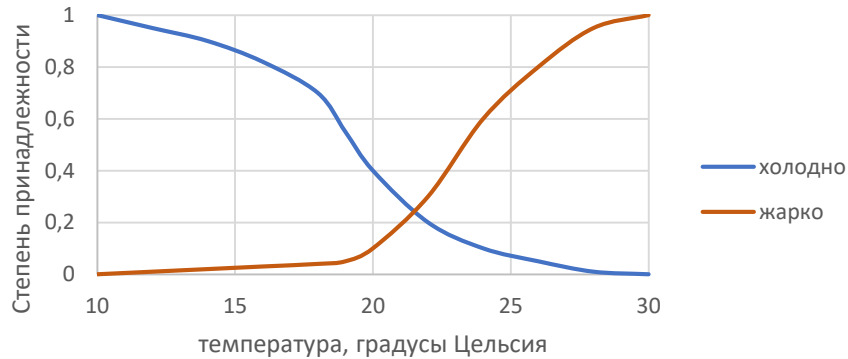
Пример нечеткой модели

Управление климатом. Входы – температура и влажность, выход – режим работы кондиционера



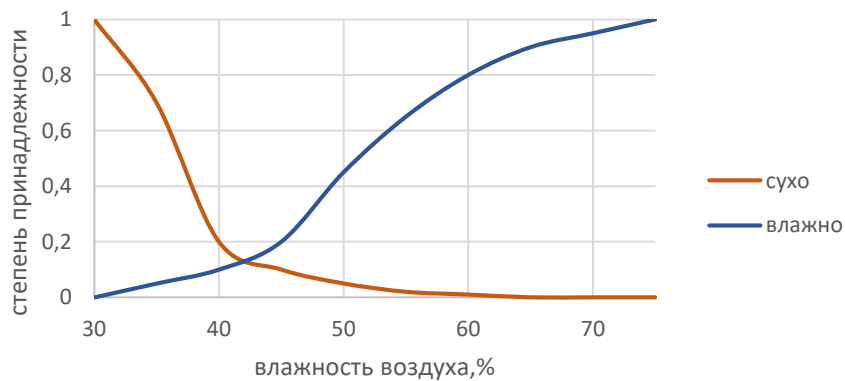
Фаззификация в нечеткой модели управления климатом

По функциям принадлежности для переменной «температура»
найти значения степеней принадлежности:



$$\mu_{\text{жарко}}(17)=0,1,$$
$$\mu_{\text{холодно}}(17)=0,8$$

По функциям принадлежности для переменной «влажность»
найти значения степеней принадлежности:

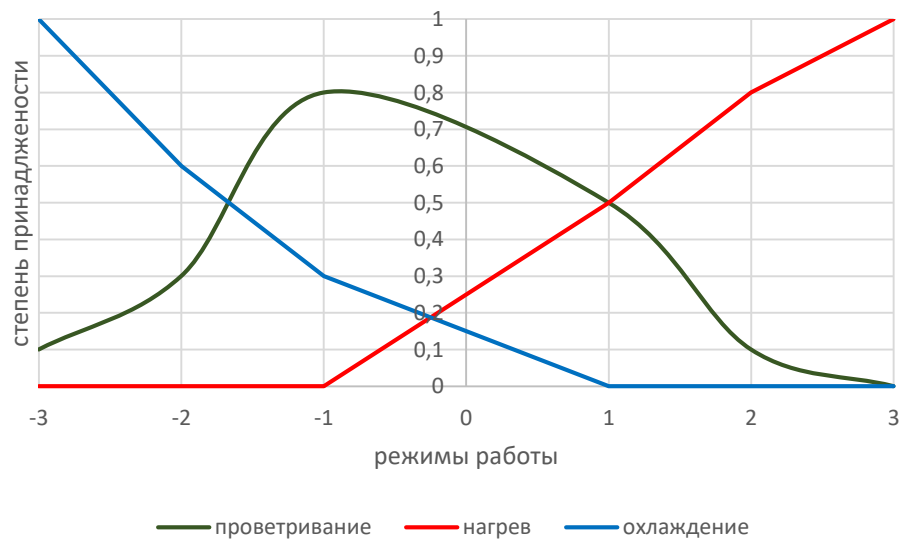


$$\mu_{\text{сухо}}(35)=0,5,$$
$$\mu_{\text{влажно}}(35)=0,5$$

Лингвистическая переменная «регулятор»

Название	регулятор
Базовое множество значений	Режимы работы $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$
Множество значений термов	• нагрев, • проветривание, • охлаждение

Функции принадлежности для термов



Правила логического вывода

Если температура=холодно и влажность = сухо,
то нагрев.

Если температура=холодно и влажность = влажно,
то нагрев и проветривание.

Если температура=жарко и влажность = сухо,
то охлаждение.

Если температура=жарко и влажность = влажно,
то охлаждение и проветривание

Найти степени принадлежности для условий правил
(конъюнкцию интерпретируем как минимум):

$$\mu_{\text{холодно и сухо}} = \min(0,8 ; 0,5) = 0,5$$

$$\mu_{\text{холодно и влажно}} = \min(0,8 ; 0,1) = 0,1$$

$$\mu_{\text{жарко и сухо}} = \min(0,1 ; 0,5) = 0,1$$

$$\mu_{\text{жарко и влажно}} = \min(0,1 ; 0,1) = 0,1$$

Импликация Мамдани для построения нечетких отношений

Если температура=холодно и влажность = сухо,
то нагрев.

Если температура=холодно и влажность = влажно,
то нагрев или проветривание.

Если температура=жарко и влажность = сухо,
то охлаждение.

Если температура=жарко и влажность = влажно,
то охлаждение или проветривание

Используем импликацию Мамдани.

Некоторые нечеткие отношения:

Хис	-3	-2	-1	1	2	3
/нагрев	0	0	0	0,5	0,8	1
0	0	0	0	0	0	0
0,2	0	0	0	0,2	0,2	0,2
0,4	0	0	0	0,4	0,4	0,4
0,6	0	0	0	0,5	0,6	0,6
0,8	0	0	0	0,5	0,8	0,8
1	0	0	0	0,5	0,8	1

Хис	-3	-2	-1	1	2	3
/проветр	0,1	0,3	0,8	0,5	0,1	0
0	0	0	0	0	0	0
0,2	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0
0,4	0,1	0,3	0,4	0,4	0,1	0
0,6	0,1	0,3	0,6	0,5	0,1	0
0,8	0,1	0,3	0,8	0,5	0,1	0
1	0,1	0,3	0,8	0,5	0,1	0

Результаты применения правил

Для каждого из термов переменной «регулятор» по 1-му правилу получены следующие степени принадлежности:

	-3	-2	-1	1	2	3
охлажден	0	0	0	0	0	0
нагрев	0	0	0	0,5	0,5	0,5
проветр	0,1	0,3	0,4	0,4	0,1	0
итог	0,1	0,3	0,4	0,5	0,5	0,5

Итоговые степени принадлежности связаны дизъюнкцией, дизъюнкцию интерпретируем как максимум.

Для каждого из термов переменной «регулятор» по каждому из правил 2, 3, 4 получены следующие степени принадлежности:

	-3	-2	-1	1	2	3
охлажден	0	0	0	0	0	0
нагрев	0	0	0	0,1	0,1	0,1
проветр	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0
итог	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1

Результат логического вывода и дефаззификация

Степени принадлежности по всем правилам связаны дизъюнкцией, дизъюнкцию интерпретируем как максимум.

	-3	-2	-1	1	2	3
1	0,1	0,3	0,4	0,5	0,5	0,5
2	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1
3	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1
4	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1
итог	0,1	0,3	0,4	0,5	0,5	0,5

Дефаззификация

- центр тяжести
$$\frac{-3 * 0,1 - 2 * 0,3 - 1 * 0,4 + 1 * 0,4 + 2 * 0,1 + 3 * 0,1}{(0,1 + 0,3 + 0,4 + 0,4 + 0,1 + 0,1)} = 0,7 \approx 1$$
- центр площади – 1 (слева 0,8, справа 1)
- средний максимум 2
- наименьший максимум 1
- наибольший максимум 3

Вывод

При температуре 17 и влажности 35 использовать 1 режим