Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени академика С.П. КОРОЛЁВА
(национальный исследовательский университет)»

Ю.В. Скворцов

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

САМАРА 2013

СОДЕРЖАНИЕ

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕХАНИКИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ 4
1.1 Представление о композитах и их классификация 4
1.2 Свойства композитов, их преимущества и недостатки 5
1.3 Предмет и задачи курса 7
2 ВОЛОКНИСТЫЕ КОМПОЗИЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ 10
2.1 Компоненты волокнистых композитов 10
2.1.1 Роль компонентов в механическом поведении композитов 10
2.1.2 Армирующие волокна 10
2.1.3 Матричные материалы 13
2.2 Схемы армирования композитов 15
2.2.1 Однонаправленные волокнистые композиты 16
2.2.2 Материалы, армированные тканями 17
2.2.3 Композиты с хаотическим армированием 18
2.2.4 Композиты с пространственным армированием 18
3 УПРУГИЕ СВОЙСТВА ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ 19
3.1 Обобщённый закон Гука для анизотропного тела 19
3.2 Эффективные модули упругости однонаправленного материала 26
3.2.1 Определение свойств композитов методами микромеханики 26
3.2.2 Простейшая микромодель композита 28
3.2.3 Микромодель, учитывающая форму волокон 31
4 РАСЧЁТ СЛОИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ 33
4.1 Преобразование упругих характеристик однонаправленного материала при повороте системы координат 33
4.2 Упругие характеристики многослойных композитов при плоском напряжённом состоянии 36
4.3 Изгиб многослойных композиционных материалов 39
5 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ КОМПОЗИТОВ 43
5.1 Структурный и феноменологический подходы 43
5.2 Критерии разрушения однонаправленного композиционного материала 44
6 ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ 52
6.1 Стержни из композиционных материалов 52
6.2 Композитные пластины 56

6.2.1 Исходные допущения 56
6.2.2 Физические соотношения с учётом деформаций поперечного сдвига 60
6.2.3 Уравнения теории слоистых пластин 61
6.2.4 Частные случаи 64
7 ТРЁХСЛОЙНЫЕ КОНСТРУКЦИИ 66
7.1 Понятие о трёхслойных конструкциях 66
7.2 Модели деформирования трёхслойных конструкций 69
7.3 Энергетические оценки 71
8 КОНЦЕНТРАТОРЫ И ДЕФЕКТЫ В КОМПОЗИТАХ 76
8.1 Кромочные эффекты 76
8.2 Влияние дефектов типа расслоения 78
8.2.1 Вводные замечания 78
8.2.2 Моделирование расслоений в трёхслойных конструкциях 80
8.2.3 Анализ роста расслоений 82
9 ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ 86
9.1 Основные этапы технологического процесса 86
9.2 Прессование элементов из волокнистых композитов 88
9.3 Вакуумное и автоклавное формование 90
9.4 Намотка 91
9.4.1 Основные этапы процесса 91
9.4.2 Виды и способы намотки 92

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕХАНИКИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

1.1 Представление о композитах и их классификация

Композитом называется неоднородный (гетерогенный) материал, состоящий из двух или нескольких взаимно нерастворимых компонентов (фаз). Согласно этому определению к композитам относятся дисперсионно-упрочнённые сплавы, бетоны, металлы с покрытием и т.д. Поликристаллические тела, состоящие из одного вещества, тоже можно отнести к этому классу материалов, рассматривая гранулы с разной ориентацией как различные фазы. Наконец, сюда можно отнести и однородные материалы с пустотами (последние можно трактовать как включения с равным нулю модулем упругости).

Ради удобства одну из фаз будем называть матрицей (или связующим), а другие – включениями (или армирующими элементами). Композиционные материалы обычно классифицируются по форме включений. Самыми распространенными среди них являются макрочастицы (гранулы), короткие (или разорванные) волокна, непрерывные длинные волокна (нити), а также слои.

Композиты, армированные такими элементами, у которых все размеры являются величинами одного порядка, называются гранулированными. Материалы, которые можно отнести к гранулированным композитам, весьма разнообразны по своей природе.

Композиты, армированные такими элементами, два измерения которых много больше третьего, носят название плоскотекстурированных.

И, наконец, отметим волокнистые композиты, получившие наибольшее распространение в современных силовых конструкциях. Они состоят из сравнительно податливой матрицы, армированной высокопрочными волокнами с высокими значениями модуля упругости E и предела прочности $\sigma_{\text{в}}$. Здесь различают два главных типа: композиты с непрерывными волокнами и композиты с короткими (разорванными) волокнами. В свою очередь в первом из указанных типов длинные волокна могут быть либо расположены строго параллельны друг другу, либо сплетены в ткань, пропитанную полимерным связующим. Однако текстильная переработка заметно снижает прочность и жёсткость материала.

Следует отметить, что первичные волокна, как правило, являются слишком тонкими для организации эффективного технологического процесса

изготовления композитов. Поэтому очень часто их объединяют в жгуты (пучки связанных волокон). Каждый жгут обычно состоит из большого количества волокон (например, углеродный жгут может содержать от 1000 до 10000 волокон). Такой подход позволяет существенно снизить производственные затраты, а следовательно, и стоимость композитов.

1.2 Свойства композитов, их преимущества и недостатки

Интерес к этим материалам обусловлен тем, что присущий им комплекс свойств и особенностей существенно отличает их от традиционных конструкционных материалов. Это прежде всего высокая прочность и низкая плотность, а также возможность управления механическими и физическими характеристиками при создании материала конструкции. Свойства композитов зависят в первую очередь от свойств исходных компонентов: армирующих элементов и матрицы. Кроме того, их соединение даёт эффект синергизма, связанный с появлением у композиции свойств, не характерных для изолированных исходных компонентов.

Композиты отличаются широким спектром полезных, а в некоторых отношениях и уникальных свойств, и их рациональное сочетание позволяет получать эффективные конструкции с высокой степенью весового совершенства и заданной анизотропией физико-механических характеристик материала. Вопрос реализации свойств связан с управлением характеристиками композитов в процессе изготовления конструкции путём изменения ориентации волокон и сочетания слоёв из различных материалов. Это позволяет получать материалы с необходимыми свойствами и характеристиками.

В принципе для каждой конструкции может быть разработан материал, наиболее полно соответствующий её назначению, полю действующих нагрузок и условиям эксплуатации. В этом отношении композиты аналогичны природным материалам, рациональное сочетание свойств которых сформировалось в процессе длительной эволюции.

Направленный характер свойств композитов одновременно означает, что наряду с высокими характеристиками в одних направлениях они обладают низкими в других. Поэтому сделать сколь угодно плохую конструкцию из сколь угодно хорошего композита гораздо проще, чем сделать её из металла. Однако правильный учёт особенностей композитов позволяет получать конструкции, обладающие высокой степенью весового совершенства, не достижимой при использовании традиционных материалов.

Как показывают экспериментальные данные, конструкции из композитов не имеет сложных проблем с обеспечением длительного ресурса по условиям выносливости.

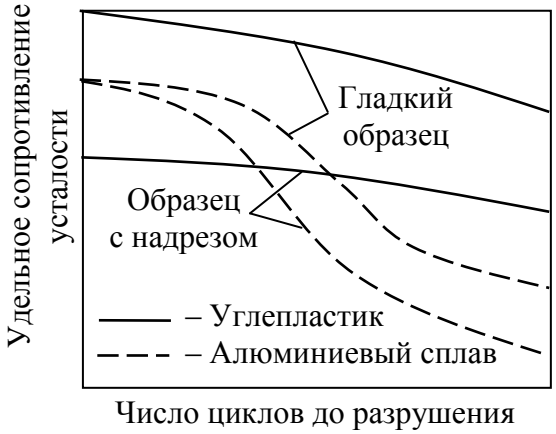


Рисунок 1.1 – Кривые усталости

На рисунке 1.1 представлены зависимости удельного сопротивления усталости различных образцов от числа циклов до разрушения. Видно, что при однократном статическом нагружении прочность гладкого и прочность надрезанного образцов из алюминиевого сплава не отличаются, а у углепластика происходит существенное снижение статической прочности. При циклическом нагружении сопротивление усталости углепластика с надрезом и без снижается слабо, а образцов из алюминиевого сплава – сильно.

Для металлических конструкций видимые повреждения (царапины, вмятины) практически не снижают несущей способности, но инициируют развитие усталостной трещины. Повреждение же композитной конструкции в процессе эксплуатации обычно обусловлено не циклическим нагружением, а случайным механическим ударным воздействием. Прочность композитов при ударном повреждении меняется скачкообразно. Дальнейшее развитие повреждений при циклическом нагружении, как правило, происходит медленно. Это связано с тем, что волокна в композиционных материалах уменьшают скорость распространения трещин, зарождающихся в матрице, как следствие, полностью исчезает внезапное хрупкое разрушение композитов.

Существующий опыт создания конструкций из полимерных композиционных материалов указывает на повышенный разброс их жесткостных и прочностных характеристик, источником которого являются нестабильность исходных компонентов, отклонения в выполнении технологических процессов, недостаточная культура производства и др. Это факт учитывается введением дополнительного коэффициента безопасности при определении расчётной нагрузки, величина которого зависит от коэффициента вариации механических свойств композита.

Проблема прочности соединений является одной из основных при использовании полимерных композиционных материалов в сложных составных

конструкциях. Здесь применяют клеевые и механические соединения, однако перспективными являются клеевые и клеемеханические соединения как более соответствующие строению и структуре композита. Высокопрочные механические соединения композитных деталей могут быть получены при использовании игольчатых соединений, содержащих большое количество металлических крепёжных элементов малого диаметра. Увеличение площади среза и смятия позволяет получать соединения, прочность которых составляет 80…90% прочности материала в регулярной зоне.

К другим недостаткам композиционных материалов следует отнести гигроскопичность (т.е. склонность впитывать влагу) и токсичность. Кроме того, композиционные материалы обладают низкой эксплуатационной технологичностью, низкой ремонтопригодностью и высокой стоимостью эксплуатации. Это связано с необходимостью применения специальных трудоёмких методов, специальных инструментов для доработки и ремонта изделий из композитов. Часто такие объекты вообще не подлежат какой-либо доработке и ремонту.

1.3 Предмет и задачи курса

Механика композиционных материалов – это один из основных разделов современной механики деформируемого твёрдого тела. Предметом механики композитов является, во-первых, разработка моделей и методов для предсказания свойств композита по известным свойствам его компонентов с целью проектирования наилучшего для поставленной задачи композита, во-вторых, исследование процессов деформирования и разрушения изделий из композиционных материалов и разработка методов расчёта и оптимального проектирования таких изделий. Эти два направления механики композитов тесно связаны между собой, тем более, что, как правило, композитный материал проектируется и создаётся одновременно с изделием.

Значительное место в механике композитов принадлежит технологическим задачам. В отличие от свойств традиционных материалов, технология которых хорошо отработана и устойчива, свойства композитов довольно чувствительны к малым изменениях технологического режима, а сами технологические приёмы отличаются большим разнообразием. В принципе проектирование материала, изделия и технологического процесса должно составлять единое целое.

Задачи механики композитов различают также по уровням описания, которые отличаются характерным масштабом длины (рисунок 1.2). Нижний (микроскопический) уровень описания – это уровень структурной неоднородности. Его масштаб h равен характерному размеру частицы включения, диаметру волокна или толщине армирующего слоя. Типичными задачами, возникающими на этом уровне, являются задачи о концентрации напряжений у границы двух компонентов, задачи локального разрушения и т.п.

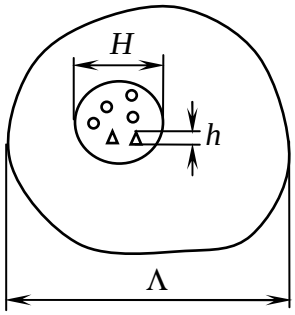


Рисунок 1.2 – Характерные масштабы длины

Следующим уровнем рассмотрения служит тот, на котором становится возможным замена гетерогенного (неоднородного) материала эквивалентным ему в некотором смысле гомогенным (однородным) материалом. Соответствующий масштаб обозначим через H. Он характеризует размер так называемого представительного объёма, т.е. такого объёма, в котором все усреднённые по объёму компоненты тензоров напряжений и деформаций равны соответствующим величинам, вычисленным для композита в целом. Таким образом, под представительным объёмом понимают область композита, наименьший размер которой много больше характерных размеров включений.

Одна из центральных задач механики композитов – вычисление эффективных (макроскопических) характеристик композита по заданным характеристикам компонентов – связана с переходом с уровня описания h на уровень описания H.

Наконец, самый высокий уровень – это тот, масштаб которого Λ равен характерному размеру изделия или расстоянию, на котором сглаженные напряжения и деформации изменяются заметно.

Для достаточно крупных изделий и при отсутствии слишком острых концентраторов можно принять $h \ll H \ll \Lambda$. В этом случае расчёт изделия может быть проведён в следующем порядке. На первом этапе (уровень h) решается задача микромеханики для существенно гетерогенного материала. Затем вычисляют эффективные характеристики композита, т.е. осуществляется переход с уровня h на уровень H. Следующий этап – решение краевой задачи для тела с найденными эффективными характеристиками (уровень Λ). Если цель состоит в определении сглаженных полей напряжений, деформаций и перемещений, то на этом этапе решение задачи заканчивается.

Если же необходимо найти структурные напряжения и деформации, то следует вернуться на уровень h.

Механика композитов находится в тесной связи с механикой многослойных конструкций. Многие широко применяемые на практике композиты имеют слоистую структуру, причём слои часто существенно отличаются по жёсткости. Примером могут служить изделия из волокнистых композитов, образованные продольно-поперечной намоткой.

2 ВОЛОКНИСТЫЕ КОМПОЗИЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

2.1 Компоненты волокнистых композитов

2.1.1 Роль компонентов в механическом поведении композитов

В волокнистых композитах высокопрочные и высокомодульные волокна воспринимают основные напряжения, возникающие в композиции при действии внешних нагрузок, придавая ей жёсткость и прочность в направлении ориентации волокон. Податливая матрица, заполняющая межволоконное пространство, обеспечивает совместную работу отдельных волокон за счёт собственной жёсткости и взаимодействия, существующего на границе раздела матрица – волокно.

Следовательно, механическое поведение композита определяется тремя основными параметрами: высокой прочностью армирующих волокон, жёсткостью матрицы и прочностью связи на границе матрица – волокно.

То или иное соотношение этих параметров характеризует весь комплекс механических свойств материала и механизм его разрушения. Работоспособность композита обеспечивается как правильным выбором исходных компонентов, так и рациональной технологией их совмещения, призванной обеспечить прочную связь между ними при сохранении первоначальных свойств.

2.1.2 Армирующие волокна

Волокна, применяемые в конструкционных композиционных материалах, должны удовлетворять комплексу эксплуатационных и технологических требований. К первым относятся требования по прочности, жёсткости, плотности, стабильности свойств в необходимом температурном интервале, химической стойкости и т.п. Технологичность волокон определяет возможность создания высокопроизводительного процесса изготовления изделий на их основе. Важным требованием здесь является совместимость волокон с матричным материалом. В технологическом аспекте совместимыми можно считать компоненты, на границе которых возможно достижение прочной связи, близкой к прочности матрицы, при условиях, обеспечивающих исходных значений механических свойств компонентов. Наибольшие трудности в этой связи возникают при создании материалов на основе металлической матрицы, поскольку большинство волокон не совместимы с металлами.

Рассмотрим основные типы волокон.

1. *Стеклянные волокна*. Непрерывные стеклянные волокна образуются из расплавленной стекломассы путём вытягивания струи на выходе из фильер до диаметра 5…20 мкм. Предел прочности после вытягивания стеклянных волокон составляет 2…6 ГПа и определяется в основном составом стекломассы, условиями вытяжки и последующей обработки. Модуль упругости волокон составляет 50…130 ГПа, плотность 2500…2600 кг/м^3.

Именно со стеклянными волокнами английским учёным А.Гриффитсом были проведены в 1920 г. эксперименты, положившие начало механике хрупкого разрушения и обосновавшие основное свойство тонких волокон – высокую прочность по сравнению с прочностью монолитного материала. Благодаря этому они и используются в композитах.

Как известно, теоретическая прочность материалов, предсказываемая физикой твёрдого тела, значительно (на несколько порядков) превосходит прочность реальных материалов. В частности, теоретический предел прочности стекла составляет примерно 14 ГПа, а для стеклянных стержней диаметром 1 мм почти в 100 раз меньше. Такая разница связана с влиянием поверхностных дефектов – трещин, существенно снижающих прочность реальных материалов. Гриффитсом была установлена критическая длина трещины, при которой трещина проявляет тенденцию к неограниченному росту, приводящему к разрушению материала. Поскольку глубина трещины на поверхности волокна не может превышать его диаметра, естественно ожидать возрастание предела прочности при уменьшении диаметра волокна. Экспериментально установлено, что при уменьшении диаметра стеклянных волокон, начиная от 0,03 мм, предел прочности резко увеличивается.

При изготовлении композитных элементов конструкций стеклянные волокна используются в виде первичных нитей, ровингов (т.е. прядей нескрученных нитей), кручённых нитей и тканей на их основе. Текстильная обработка заметно снижает предел прочности.

Достоинствами стеклянных волокон являются высокая прочность при растяжении и сжатии, сравнительно низкая стоимость исходных материалов и процесса изготовления, хорошая совместимость с полимерными матрицами и технологичность. Недостатки связаны с низким модулем упругости и сравнительно низкой теплостойкостью.

2. *Углеродные (или углеродистые) волокна*. Они представляют собой поликристаллические вещества с высокой степенью ориентации структуры. Исходным сырьём для их получения являются органические волокна, кото-

рые можно карбонизировать без расплавления. Процесс их изготовления заключается в последовательном температурном и механическом воздействии на исходные органические волокна, приводящем к их карбонизации, графитизации и совершенствованию структуры.

В зависимости от условий получения и типа исходного сырья предел прочности и модуль упругости углеродных волокон находятся соответственно в пределах 2…3,5 МПа и 220…700 ГПа, а плотность 1750…1950 кг/м^3. Наибольшей прочностью обладают волокна, нагрев которых на последнем этапе при температуре 1600^{o}С создаёт мелкокристаллическую структуру. Высокомодульные материалы получают в результате растяжения волокон при температуре 2700^{o}С.

В качестве армирующих элементов композитных материалов углеродные волокна применяются в виде жгутов, лент и тканей. Они являются более хрупкими и менее технологичными, чем стеклянные, отличаются плохой совместимостью с матричными материалами.

Основными достоинствами углеродных волокон являются их более высокая по сравнению со стеклянными волокнами жёсткость и высокая теплостойкость. Так, механические характеристики углеродных волокон сохраняются неизменными при повышении температуры до 750^{o}С. Кроме того, эти волокна характеризуются отрицательным температурным коэффициентом линейного расширения, что в совокупности с положительным коэффициентом у матрицы позволяет синтезировать конструкции, сохраняющие свои размеры при температурном воздействии.

3. *Борные волокна*. Эти волокна получают осаждением бора на нагреваемую вольфрамовую нить диаметром 12…16 мкм. При таком процессе вокруг нити формируется борная оболочка, частично прореагировавшая с материалом нити.

В настоящее время выпускают волокна диаметром 100…200 мкм, имеющие предел прочности при растяжении 2…4 ГПа, модуль упругости 370…430 ГПа, плотность 2500…2700 кг/м^3.

Борные волокна обладают высокой чувствительностью к концентраторам напряжений, чем объясняется их бóльшая прочность при сжатии, нежели при растяжении. Волокна бора выпускаются в виде моноволокон, комплексных нитей и лент. Комплексные нити представляют собой пучки непрерывных параллельно уложенных волокон бора с обмоткой вспомогательной стеклянной нитью.

Борные волокна хорошо совмещаются как с полимерной, так и с металлической матрицей. Их основными достоинствами являются высокая жёсткость и прочность при сжатии. К недостаткам можно отнести высокую стоимость, хрупкость и связанную с ней низкую технологичность, большую толщину элементарного слоя, определяемую диаметром волокон.

4. *Органические волокна*. Высокомодульные органические волокна получают из концентрированных растворов полимеров формованием через фильеры. Далее волокна пропускают через ванны осаждения, где удаляется основная часть растворителя, после чего осуществляют ориентационную вытяжку и фиксацию структуры волокон.

В зависимости от состава полимера и метода формования получают органические волокна, имеющие предел прочности при растяжении 1,8…3 ГПа, модуль упругости 70…130 ГПа, плотность 1410…1450 кг/м^3.

При достаточно высоком модуле упругости и большом предельном удлинении (до 2%) органические волокна обладают высокой ударной вязкостью и малой чувствительностью к повреждениям. Последнее свойство позволяет сохранять до 90% прочности волокон при получении тканевых полуфабрикатов. Органические волокна хорошо воспринимают растягивающую нагрузку. При сжатии композиты на основе органических волокон значительно уступают стеклопластикам. Рассматриваемые волокна обладают хорошей технологичностью, однако совмещаются с полимерными связующими хуже, чем стеклянные.

2.1.3 Матричные материалы

В композиционных материалах важная роль отводится матрице, которая обеспечивает монолитность композита, фиксирует форму изделия и взаимное расположение армирующих волокон, распределяет действующие напряжения по объёму материала, обеспечивая равномерную нагрузку на волокно и её перераспределение при разрушении части волокон.

Требования, предъявляемые к матричным материалам, также можно разделить на эксплуатационные и технологические. К первым относятся требования, связанные с механическими и физико-химическими свойствами материала матрицы, обеспечивающими работоспособность композиции при действии различных эксплуатационных факторов. Механические свойства матрицы должны обеспечивать эффективную совместную работу волокон при различных видах нагрузок. Прочностные характеристики материала мат-

рицы являются определяющими при сдвиговых нагрузках, нагружении композиции в направлениях, отличных от ориентации волокон, а также при циклическом нагружении. Природа матрицы определяет уровень рабочих температур, характер изменения свойств при воздействии атмосферных и других факторов. От выбора матрицы зависят термостойкость, сопротивление ударным нагрузкам и усталости.

Технологические требования к матрице определяются осуществляющими обычно одновременно процессами получения композита и изделия из него. Основным содержанием этих процессов является совмещение армирующих волокон с матрицей и окончательное формообразование изделия. Целью технологических операций является обеспечение равномерного (без касания между собой) распределение волокон в матрице при заданном их объёмном содержании, максимально возможное сохранение прочностных свойств волокон, создание достаточно прочного взаимодействия на границе раздела волокно – матрица.

Отсюда вытекают следующие технологические требования к материалу матрицы: хорошее смачивание волокна матрицей в процессе пропитки; возможность предварительного изготовления полуфабрикатов (например, препрегов[1]) с последующим изготовлением из них изделий; качественное соединение слоёв композита в процессе формования; невысокая интенсивность параметров окончательного формообразования (например, давления) и т.д.

В настоящее время наиболее широкое распространение получили волокнистые композиты на основе полимерной и металлической матриц.

1. *Термореактивные полимерные матрицы*. Связующие рассматриваемого типа образуются из смолы, отвердителя, катализатора или инициатора отверждения и растворителя, который иногда вводят для понижения вязкости и улучшения пропитки армирующих элементов.

В исходном состоянии связующее представляет собой вязкую жидкость, которая в результате полимеризации при нормальной или повышенной температуре отверждается и переходит в нерастворимую и неплавкую матрицу.

2. *Термопластичные полимерные матрицы*. В последние годы всё более широкое применение находят термопластичные матричные материалы,

[1] Препрег – это предварительно пропитанный и частично отверждённый полуфабрикат.

которые при нагревании расплавляются, а при последующем охлаждении затвердевают.

По уровню механических характеристик некоторые термопласты не уступают отверждённым термореактивным связующим, а по таким свойствам, как химическая стойкость и герметичность, обычно превосходят их. К недостаткам рассматриваемых связующих относятся ярко выраженная зависимость свойств от температуры, низкая теплостойкость и технологические трудности, связанные с высокой вязкостью их растворов и расплавов.

3. *Металлические матрицы*. В последние годы всё более широкое применение находят металлические композитные материалы, образуемые из высокомодульных борных или углеродных волокон и пластичной металлической матрицы.

Обычно в качестве матричного материала используются алюминиевые сплавы. Они способны подвергаться разнообразным видам пластического деформирования, литья, операциям порошковой металлургии, на которых и основываются различные способы изготовления изделий из композитов на металлической матрице.

Все способы совмещения волокон и матрицы можно разделить на твёрдофазные, жидкофазные и осаждение. Твёрдофазные способы заключаются в сборке пакета заготовок, состоящего из чередующихся слоёв материала матрицы и волокон, и последующем соединении компонентов между собой. Жидкофазные способы предусматривают различные виды литья расплавленного материала матрицы, обеспечивающие пропитку предварительно уложенной системы волокон. Образование металлической матрицы методами осаждения состоит в нанесении на волокна различными способами слоя металла и заполнении им межволоконного пространства.

2.2 Схемы армирования композитов

Свойства композитов зависят не только от свойств волокон и матрицы, но и от способа армирования, в отношении которого можно выделить следующие основные группы:

1. Композиты, образованные из слоёв, армированных параллельными непрерывными волокнами. Свойства таких материалов в основном определяются свойствами однонаправленного слоя.
2. Композиты, армированные тканями.
3. Композиты с хаотическим армированием.

4. Композиты с пространственным армированием.

2.2.1 Однонаправленные волокнистые композиты

Достоинства и высокие механические характеристики композитов наиболее полно реализуются в ориентированных материалах, армированных параллельными волокнами, т.е. в так называемых однонаправленных слоях или монослоях (рисунок 2.1), из которых путём укладки в различных направлениях образуются слоистые композиты.

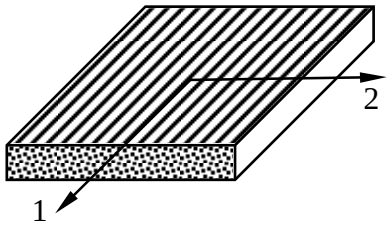


Рисунок 2.1 – Однонаправленный монослой

Наибольшие показатели механических свойств однонаправленные композиты имеют при нагружении вдоль волокон. Прочность и модуль упругости вдоль волокон возрастают с увеличением содержания волокон в композиции, причём до определённого предела, обусловленного плотностью упаковки волокон в композиции, обеспечивающей сохранение монолитности связующего. Оптимальная степень армирования для большинства композиций составляет 60…70% по объёму. Свойства композитов зависят также от прочностных и упругих свойств матрицы и её адгезии к волокну. Приведём для справки физико-механические свойства некоторых однонаправленных композитов (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Свойства однонаправленных композитов

Характеристика	Стекло-пластик	Угле-пластик	Органо-пластик	Боро-пластик	Боро-алюминий
ρ, кг/м^3	2100	1500	1380	2000	2640
$\sigma^{+}_{1в}$, ГПа	1,75	1,1	1,8	1,6	1,4
$\sigma^{-}_{1в}$, ГПа	-0,65	-0,45	-0,28	-2,4	-2
E_1, ГПа	57	180	72	210	230
$\sigma^{+}_{2в}$, ГПа	0,034	0,033	0,028	0,065	0,14
E_2, ГПа	9,0	6,2	4,9	19	140
$\sigma_{12в}$, ГПа	0,048	0,027	0,042	0,102	0,084
G_{12}, ГПа	5,2	5,0	2,0	6,2	63
$\sigma^{+}_{1в}/\rho\times10^{-3}$, м	83	73	130	80	53
$E_1/\rho\times10^{-6}$, м	2,7	12	5,3	10,5	8,8

Здесь $\sigma_{1в}^{+}$ и $\sigma_{1в}^{-}$ – пределы прочности соответственно при растяжении и сжатии вдоль волокон; $\sigma_{2в}^{+}$ – предел прочности при растяжении поперёк волокон; $\sigma_{12в}$ – предел прочности при сдвиге в плоскости слоя; E_1 и E_2 – модули упругости соответственно вдоль и поперёк волокон; G_{12} – модуль сдвига.

При растяжении вдоль волокон зависимость $\sigma - \varepsilon$ практически линейна вплоть до разрушения. Сравнение характеристик однонаправленных композитов при растяжении вдоль волокон показывает, что наибольшей удельной прочностью обладает органопластик, а угле- и боропластики значительно превосходят стекло- и органопластики по жёсткости.

Модули упругости таких материалов при растяжении и сжатии в направлении волокон практически одинаковы. В то же время разрушающие напряжения при растяжении и сжатии могут значительно отличаться. У большинства материалов прочность при растяжении выше, чем при сжатии, однако у боропластиков наоборот выше прочность при сжатии. Прочность на сжатие у органопластика значительно меньше, чем у других материалов.

Основной недостаток рассматриваемых композитов – их низкие механические свойства при поперечном нагружении и сдвиге, обусловленные недостаточной прочностью матрицы и связи на границе раздела компонентов.

2.2.2 Материалы, армированные тканями

Большинство применяемых волокон (исключение составляют лишь борные) в результате текстильной переработки позволяют получать ткани, которые широко используют в композитах в качестве армирующих элементов. Основным преимуществом таких материалов является их высокая технологичность, особенно при изготовлении крупногабаритных изделий. В то же время текстильная переработка волокон и их искривление, появляющееся в результате переплетения, вызывают значительное снижение прочности и жёсткости материала при нагружении в направлениях армирования.

Ткани обычно изготавливают из низкомодульных стеклянных и органических волокон. В производстве композитов на основе тканей (текстолитов) применяют в основном ткани полотняного и сатинового переплетения. По удельным характеристикам рассматриваемые композиты соответствуют традиционным конструкционным материалам.

2.2.3 Композиты с хаотическим армированием

Такие композиты образуются в результате соединения полимерной матрицы с неориентированными непрерывными или короткими волокнами. Наибольшее распространение здесь получили материалы, содержащие хаотически расположенные в плоскости (редко в пространстве) короткие волокна длиной 5…100 мм. Они характеризуются большей, чем ориентированные пластики, изотропией свойств. Основными достоинствами таких материалов являются хорошая технологичность и сравнительно низкая стоимость, в связи с чем их широко применяют для изготовления деталей несилового назначения.

2.2.4 Композиты с пространственным армированием

Существенным недостатком композитов, образованных из армированных слоёв, является их низкая прочность при межслоевом сдвиге, растяжении и сжатии в трансверсальном направлении. Этот недостаток в значительной мере устраняется при пространственном армировании. Образование таких композиций возможно с помощью многослойных тканей, систем нитей, ориентированных в трёх или более направлениях, а также при помощи дискретных волокон, размещаемых в пространстве между основными армирующими элементами.

3 УПРУГИЕ СВОЙСТВА ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

Композиционные материалы, как правило, анизотропны, что определяет особую форму связи напряжений и деформаций.

Для тонкостенных многослойных конструкций типичны плоское напряжённое состояние и изгиб. Поэтому практически важен переход от общих соотношений для линейно упругого анизотропного тела к конкретным формам их записи для этих напряжённых состояний.

3.1 Обобщённый закон Гука для анизотропного тела

Рассмотрим деформируемое тело в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 (или x, y, z). Выделим бесконечно малый параллелепипед и покажем напряжения, действующие по его граням (рисунок 3.1).

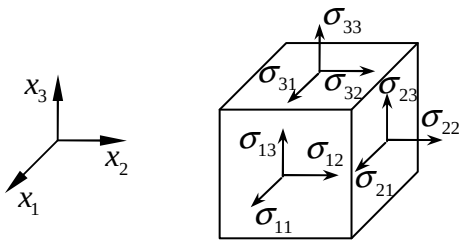


Рисунок 3.1 – Компоненты тензора напряжений

Компоненты тензора деформаций определим линейными соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \qquad (i, j = 1,2,3), \tag{3.1}$$

где u_1, u_2, u_3 – проекции полного перемещения соответственно на оси x_1, x_2, x_3.

Вследствие парности касательных напряжений и структуры соотношений (3.1) выполняются равенства

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \tag{3.2}$$

В классической линейной теории упругости рассматривают обычно изотропное тело, упругие свойства которого одинаковы по всем направлениям. При сложном напряжённом состоянии изотропного тела закон Гука записывается как

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \mu(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right]; \qquad \gamma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G}; \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \mu(\sigma_{33} + \sigma_{11})\right]; \qquad \gamma_{23} = \frac{\sigma_{23}}{G}; \\
\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \mu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\right]; \qquad \gamma_{31} = \frac{\sigma_{31}}{G},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где E – модуль упругости материала; μ – коэффициент Пуассона; G – модуль сдвига, связанный с E и μ формулой

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Входящие в (3.3) величины углов сдвига выражаются через компоненты тензора деформаций как

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji} = 2\varepsilon_{ij} \qquad (i \neq j).$$

Независимые компоненты тензоров напряжений и деформаций можно объединить в матрицы-столбцы:

$$\begin{aligned} [\sigma] &= \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}\}; \\ [\varepsilon] &= \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{31}\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь и далее фигурные скобки обозначают матрицу-столбец.

Тогда закон Гука в матричной записи примет вид

$$[\varepsilon] = [\Phi][\sigma], \tag{3.5}$$

где матрица податливости материала $[\Phi]$ определяется зависимостью

$$[\Phi] = \frac{1}{E}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{array}\right]. \tag{3.6}$$

Важнейшей особенностью закона Гука для изотропного тела является то, что матрица $[\Phi]$ инвариантна по отношению к выбору системы координат и формируется с использованием только двух независимых констант (E и μ), полностью определяющих упругие свойства изотропного тела. Кроме того, при сложном напряжённом состоянии изотропного тела относительные удлинения ε_{ii} не зависят от касательных напряжений σ_{ij}, но связаны со всеми нормальными компонентами напряжений σ_{ii}, в то время как углы сдвига γ_{ij} зависят лишь от соответствующих касательных напряжений σ_{ij}. Поэтому

для упругого изотропного тела главные оси напряжённого состояния всегда совпадают с главными осями деформированного состояния.

Разрешая систему уравнений (3.5) относительно напряжений, закон Гука можно переписать в следующем виде:

$$[\sigma]=[\kappa][\varepsilon], \tag{3.7}$$

где $[\kappa]=[\Phi]^{-1}$ – матрица жёсткости материала:

$$[\kappa]=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{array}\right]. \tag{3.8}$$

Упругое тело называют анизотропным, когда его упругие свойства различны в разных направлениях. В этом случае любая из компонент тензора напряжений σ_{ij} может привести к возникновению всех компонент тензора деформаций. Например, если брус прямоугольного сечения из анизотропного материала равномерно растягивать вдоль его оси, то в общем случае такой брус кроме удлинения вдоль оси и изменений размеров поперечных сечений (различных в разных направления) будет претерпевать ещё и деформации сдвига во всех трёх плоскостях, приводящие к изменению первоначально прямых углов между его гранями.

Для анизотропного тела коэффициенты податливости зависят от выбора системы координат. В общем случае они образуют полностью заполненную матрицу $[\Phi]$ размером 6x6. Нетрудно показать, что в силу теоремы о взаимности работ для компонент матрицы податливости материала выполняется условие $\Phi_{mn}=\Phi_{nm}$. Поэтому независимыми являются лишь шесть диагональных и половина внедиагональных, т.е. всего 21 коэффициент, и закон Гука в развёрнутом виде записывается следующим образом:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{12}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & \Phi_{15} & \Phi_{16}\\ & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} & \Phi_{25} & \Phi_{26}\\ & & \Phi_{33} & \Phi_{34} & \Phi_{35} & \Phi_{36}\\ & & & \Phi_{44} & \Phi_{45} & \Phi_{46}\\ & \text{сим.} & & & \Phi_{55} & \Phi_{56}\\ & & & & & \Phi_{66}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\end{bmatrix}. \qquad (3.9)$$

Анизотропия самого общего вида (когда матрица [Φ] содержит 21 независимый коэффициент) у реальных материалов – явление редкое. Обычно структура материала такова, что его упругие свойства в некоторых направлениях идентичны. В этих случаях число независимых коэффициентов в матрице [Φ] (и, следовательно, в [κ]) уменьшается, и при надлежащем выборе системы координат упрощается запись закона Гука.

Плоскость упругой симметрии. Если в анизотропном теле его упругие свойства идентичны в любых двух направлениях, симметричных относительно некоторой плоскости, то такая плоскость называется плоскостью упругой симметрии (рисунок 3.2).

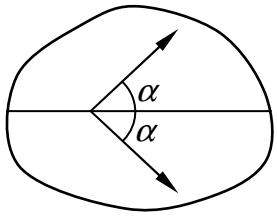


Рисунок 3.2 – Плоскость упругой симметрии

В этом случае число независимых коэффициентов, описывающих упругие свойства материала, сокращается до 13, и закон Гука принимает более простой вид при совмещении одной из координатных плоскостей с плоскостью упругой симметрии. Например, совместив с плоскостью симметрии координатную плоскость (x_1, x_2), можно матрицу коэффициентов податливости представить в виде

$$[\Phi]=\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & 0 & 0\\ & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} & 0 & 0\\ & & \Phi_{33} & \Phi_{34} & 0 & 0\\ & & & \Phi_{44} & 0 & 0\\ & \text{сим.} & & & \Phi_{55} & \Phi_{56}\\ & & & & & \Phi_{66}\end{bmatrix}. \qquad (3.10)$$

В частности, при одноосном растяжении анизотропного тела в направлении, перпендикулярном плоскости упругой симметрии,

$$\varepsilon_{11}=\Phi_{13}\sigma_{33};\quad \varepsilon_{22}=\Phi_{23}\sigma_{33};\quad \varepsilon_{33}=\Phi_{33}\sigma_{33};\quad \gamma_{12}=\Phi_{34}\sigma_{33};\quad \gamma_{23}=\gamma_{31}=0.$$

При таком напряжённом состоянии материал претерпевает деформацию сдвига только в плоскости (x_1, x_2). Отсюда следует, что если одна из главных осей напряжённого состояния перпендикулярна плоскости упругой симметрии, то одна из главных осей деформированного состояния тоже будет перпендикулярна этой плоскости. Поэтому направление, перпендикулярное плоскости упругой симметрии, называют главным направлением (или осью) упругости.

Ортотропный материал. Если в анизотропном теле имеются две взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии, то нетрудно показать, что перпендикулярная им плоскость будет тоже плоскостью упругой симметрии. Тело, обладающее тремя взаимно перпендикулярными плоскостями упругой симметрии, называют ортотропным. Для него число независимых коэффициентов, характеризующих упругие свойства, равно девяти.

Закон Гука здесь наиболее естественно и просто записывается при совмещении координатных плоскостей с плоскостями упругой симметрии. В этом случае

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & \Phi_{22} & \Phi_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \Phi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \Phi_{44} & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & & \Phi_{55} & 0 \\ & & & & & \Phi_{66} \end{bmatrix}. \qquad (3.11)$$

Выразив коэффициенты податливости через технические постоянные, получим

$$[\Phi] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1/E_1 & -\mu_{21}/E_2 & -\mu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\mu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{13}/E_1 & -\mu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} \end{array}\right]. \qquad (3.12)$$

Здесь E_1, E_2, E_3 – модули упругости соответственно в направлении осей x_1, x_2, x_3; G_{12}, G_{23}, G_{31} – модули сдвига соответственно в плоскостях (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1); μ_{ij} – коэффициенты Пуассона, причём первый индекс указы-

вает направление действующего напряжения, а второй – направление возникающей при этом поперечной деформации.

Число независимых коэффициентов в (3.12) сохраняется равным девяти, поскольку вследствие симметрии матрицы $[\Phi]$ выполняются равенства

$$\mu_{21}E_1 = \mu_{12}E_2; \qquad \mu_{32}E_2 = \mu_{23}E_3; \qquad \mu_{13}E_3 = \mu_{31}E_1.$$

Отсюда следует, что

$$\mu_{21}\mu_{32}\mu_{13} = \mu_{12}\mu_{23}\mu_{31}.$$

Плоскость изотропии. *Трансверсально-изотропное тело*. Плоскость, в которой упругие свойства во всех направлениях идентичны, называют плоскостью изотропии, а тело, обладающее такой плоскостью, называют трансверсально-изотропным. Число независимых упругих постоянных здесь оказывается равным пяти. Совместив координатную плоскость (x_1, x_2) с плоскостью изотропии, получим

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\mu_1/E_1 & -\mu_2/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E_1 & -\mu_2/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/G_1 & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & & 1/G_2 & 0 \\ & & & & & 1/G_2 \end{bmatrix}. \qquad (3.13)$$

Здесь E_1 – модуль упругости в плоскости изотропии; E_2 – модуль упругости в направлении, перпендикулярном плоскости изотропии; $G_1 = E_1/\left[2(1+\mu_1)\right]$ – модуль сдвига в плоскости изотропии; G_2 – модуль сдвига в плоскостях, перпендикулярных плоскости изотропии; μ_1 и μ_2 – коэффициенты Пуассона, характеризующие сокращения соответственно в плоскости изотропии и в направлении, перпендикулярном этой плоскости, при растяжении в плоскости изотропии.

В трансверсально-изотропном теле все направления в плоскости изотропии и направление, перпендикулярное этой плоскости, являются главными направлениями упругости. Поэтому для такого тела главные оси деформированного состояния совпадают с главными осями напряжённого состояния, если одна из главных осей напряжённого состояния перпендикулярна плоскости изотропии.

Следует подчеркнуть, что вид (т.е. заполненность) матриц [Ф] и [κ] определяется не только типом упругой симметрии, но и выбором системы координат. Тип симметрии материала однозначно определяет число независимых коэффициентов в этих матрицах, однако для любого анизотропного тела матрицы [Ф] и [κ] в произвольной системе координат, никак не согласованной с упругой симметрией материала, будут в общем случае целиком заполненными.

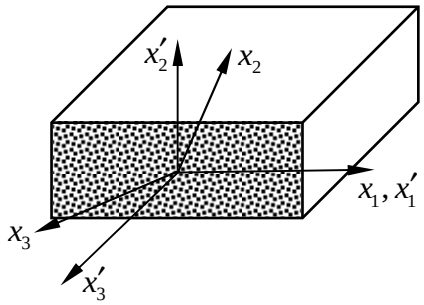


Рисунок 3.3 – Материал, армированный волокнами

Надлежащий выбор системы координат позволяет существенно упростить, исходные матрицы [Ф] и [κ], если материал обладает симметрией упругих свойств. Рассмотрим, например, композиционный материал, состоящий из упругого связующего, регулярно армированного в одном направлении упругими волокнами (рисунок 3.3). Для описания деформационных свойств такого материала можно воспользоваться моделью однородного анизотропного упругого тела. В произвольно ориентированной системе координат матрица податливости (и жёсткости) материала будет целиком заполненной, а число подлежащих определению независимых коэффициентов не ясным. В системе координат x_1, x_2, x_3 плоскость (x_2, x_3) можно считать плоскостью упругой симметрии; матрица $[\Phi]$ в этом случае будет иметь структуру (3.10). Ещё более полно симметрия упругих свойств рассматриваемого материала выявляется в системе координат x_1', x_2', x_3': плоскость (x_1', x_2') тоже можно считать плоскостью упругой симметрии. Следовательно, теперь все координатные плоскости – это плоскости упругой симметрии, материал является ортотропным, и матрица $[\Phi]$ имеет структуру (3.11). Более того, при равномерном распределении армирующих волокон допустимо считать, что упругие свойства во всех направлениях в плоскости (x_1', x_2') идентичны. Теперь становится ясным, что рассматриваемый материал является трансверсально-изотропным, матрица $[\Phi]$ имеет вид (3.13), а число подлежащих определению независимых коэффициентов, полностью характеризующих упругие свойства, равно пяти.

3.2 Эффективные модули упругости однонаправленного материала

3.2.1 Определение свойств композитов методами микромеханики

Наиболее эффективными в отношении удельных характеристик композитами являются ориентированные материалы, образованные из непрерывных волокон и полимерной или металлической матрицы. Такие композиты обладают двумя уровнями неоднородности: микронеоднородностью, связанной с наличием в материале двух фаз (волокон и матрицы), и макронеоднородностью, связанной с наличием однонаправленных слоев (или монослоев). При расчёте и проектировании конструкций обычно учитывается лишь второй уровень неоднородности материала, т.е. считается, что он состоит из совокупности квазиоднородных элементарных слоёв, свойства которых известны. Определение этих свойств и является предметом микромеханики композитов. Основная задача заключается в вычислении эффективных модулей упругости, которые определяются как коэффициенты, связывающие усреднённые по объёму напряжения и деформации. Эффективные модули зависят от формы и расположения волокон и их объёмного содержания в материале.

Рассмотрим однонаправленный материал (рисунок 3.4) и введём систему координат (1, 2). Индексы 1 и 2 в дальнейшем всегда будут определять величины, относящиеся к нагружению вдоль и поперёк волокон соответственно. Предположим, что на выделенный элемент слоя действуют некоторые срЯПщЯЦХЯНеЫкдние

Пренебрегая для простоты эффектом Пуассона в волокнах и матрице, рассмотрим растяжение вдоль волокон. При этом средние напряжения σ_{11} складывается из напряжений в волокнах $\sigma_{\text{В}}$ и матрице $\sigma_{\text{М}}$:

$$\sigma_{11} ah = \sigma_{\text{В}} a_{\text{В}} h + \sigma_{\text{М}} a_{\text{М}} h$$

или после деления на ah

$$\sigma_{11} = \sigma_{\text{В}} \psi + \sigma_{\text{М}} (1 - \psi). \qquad (3.16)$$

Напряжения в волокнах и матрице связаны с деформациями законом Гука, т.е.

$$\sigma_{\text{В}} = E_{\text{В}} \varepsilon_{\text{В}}; \qquad \sigma_{\text{М}} = E_{\text{М}} \varepsilon_{\text{М}},$$

причём при растяжении вдоль волокон

$$\varepsilon_{\text{В}} = \varepsilon_{\text{М}} = \varepsilon_{11}.$$

Таким образом, из (3.16) имеем

$$\sigma_{11} = \left[E_{\text{В}} \psi + E_{\text{М}} (1 - \psi) \right] \varepsilon_{11}.$$

Сравнивая это соотношение с первым равенством (3.14) при $\mu_{21} = 0$, получаем

$$E_1 = E_{\text{В}} \psi + E_{\text{М}} (1 - \psi). \qquad (3.17)$$

Эта формула определяет продольный модуль упругости композита и соответствует закону механической смеси, согласно которому вклад компонента пропорционален его объёмной доле. Поскольку $E_{\text{В}} \gg E_{\text{М}}$, то

$$E_1 \approx E_{\text{В}} \psi,$$

т.е. продольный модуль упругости композиционного материала определяется модулем упругости волокон и их относительным содержанием в материале.

Теперь рассмотрим растяжение поперёк волокон средними напряжениями σ_{22}. При этом деформация в поперечном направлении складывается из деформаций волокон и матрицы:

$$\varepsilon_{22} a = \varepsilon_{\text{В}} a_{\text{В}} + \varepsilon_{\text{М}} a_{\text{М}}.$$

Отсюда

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{\text{В}} \psi + \varepsilon_{\text{М}} (1 - \psi).$$

Отдельно для волокон и матрицы можно записать

$$\varepsilon_{\text{В}} = \sigma_{\text{В}} / E_{\text{В}} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{\text{М}} = \sigma_{\text{М}} / E_{\text{М}} .$$

Согласно очевидному условию равновесия

$$\sigma_{\text{В}} = \sigma_{\text{М}} = \sigma_{22} .$$

Тогда

$$\varepsilon_{22} = \left[\frac{\psi}{E_{\text{В}}} + \frac{1-\psi}{E_{\text{М}}} \right] \sigma_{22} .$$

Сравнивая эту формулу со вторым равенством (3.14) при $\mu_{12} = 0$, находим

$$\frac{1}{E_2} = \frac{\psi}{E_{\text{В}}} + \frac{1-\psi}{E_{\text{М}}} \quad \text{или} \quad E_2 = \frac{E_{\text{В}} E_{\text{М}}}{\psi E_{\text{М}} + (1-\psi) E_{\text{В}}} . \qquad (3.18)$$

Поскольку $E_{\text{В}} \gg E_{\text{М}}$, первым слагаемым в (3.18) можно пренебречь, т.е.

$$E_2 \approx \frac{E_{\text{М}}}{1-\psi} .$$

Таким образом, поперечный модуль упругости материала больше модуля упругости матрицы.

Аналогичная зависимость имеет место и для среднего модуля сдвига:

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{\psi}{G_{\text{В}}} + \frac{1-\psi}{G_{\text{М}}} \quad \text{или} \quad G_{12} = \frac{G_{\text{В}} G_{\text{М}}}{\psi G_{\text{М}} + (1-\psi) G_{\text{В}}} , \qquad (3.19)$$

где $G_{\text{В}}$ и $G_{\text{М}}$ – модули сдвига волокон и матрицы.

Более полный анализ рассмотренной модели с учётом коэффициентов Пуассона для волокон и матрицы ($\mu_{\text{В}}$, $\mu_{\text{М}}$) позволяет найти μ_{12}:

$$\mu_{12} = \mu_{\text{В}} \psi + \mu_{\text{М}} (1-\psi) \qquad (3.20)$$

и уточнить выражение для E_2:

$$\frac{1}{E_2} = \frac{\psi}{E_{\text{В}}} + \frac{1-\psi}{E_{\text{М}}} + \frac{\left[\mu_{\text{В}} \psi + \mu_{\text{М}} (1-\psi) \right]^2}{E_{\text{В}} \psi + E_{\text{М}} (1-\psi)} .$$

Отметим, что μ_{21} определяется из условия симметрии (3.15):

$$\mu_{21} = \mu_{12} \frac{E_2}{E_1} .$$

Для большинства однонаправленных материалов $E_1 \gg E_2$, поэтому, как правило, $\mu_{21} \ll \mu_{12}$.

3.2.3 Микромодель, учитывающая форму волокон

Рассмотрим более сложную модель, состоящую из системы круглых волокон, помещённых в матрицу (рисунок 3.6). В отношении продольного модуля упругости E_1 она приводит к прежнему результату (3.17). Однако для случая поперечного растяжения данная модель позволяет приближённо учесть неравномерность распределения напряжений в окрестности волокна и оценить прочность материала с учётом возникающей концентрации напряжений.

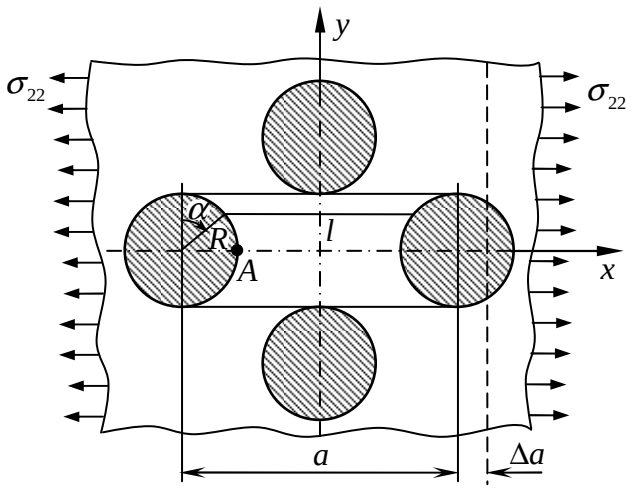


Рисунок 3.6 – Поперечное сечение модели

Для рассматриваемой модели коэффициент армирования находится как

$$\psi = \frac{\pi R^2}{2Ra} = \frac{\pi R}{2a}. \tag{3.21}$$

Предположим, что волокна являются абсолютно жёсткими, а матрица между ними находится в условиях одноосного растяжения в направлении оси x (см. рисунок 3.6). Тогда относительное удлинение элемента матрицы с первоначальной длиной $l = a - 2R\sin\alpha$ определяется равенством

$$\varepsilon_{\text{М}} = \Delta a / l .$$

Напряжения в матрице связаны с соответствующими деформациями законом Гука $\sigma_{\text{М}} = E_{\text{М}}\varepsilon_{\text{М}}$, а для средней деформации справедлива формула

$$\varepsilon_{22} = \Delta a / a .$$

С учётом этих соотношений и (3.21) устанавливаем

$$\sigma_{\text{М}} = \frac{E_{\text{М}}\varepsilon_{22}}{1 - \lambda\sin\alpha}, \tag{3.22}$$

где

$$\lambda = \frac{2R}{a} = \frac{4\psi}{\pi}.$$

Осреднение напряжений (3.22) по оси y должно, очевидно, приводить к средним напряжениям σ_{22}:

$$2R\sigma_{22} = \int_{-R}^{R} \sigma_{\text{М}}\, dy.$$

Отсюда, учитывая, что $y = R\cos\alpha$, согласно (3.22) находим

$$\sigma_{22} = E_2 \varepsilon_{22},$$

где

$$E_2 = \frac{\pi E_{\text{М}}}{2\psi}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} - \frac{\pi}{4}\right). \qquad (3.23)$$

Подставляя $\varepsilon_{22} = \sigma_{22}/E_2$ в формулу (3.22), получаем

$$\sigma_{\text{М}} = \frac{E_{\text{М}}\sigma_{22}}{E_2(1-\lambda\sin\alpha)}. \qquad (3.24)$$

Видно, что максимальное значение $\sigma_{\text{М}}$ реализуется при $\alpha = \pi/2$, т.е. в точке A на рисунке 3.6. Коэффициент концентрации по отношению к средним напряжениям равен

$$k = \frac{\sigma_{\text{М}}^{\max}}{\sigma_{22}} = \frac{E_{\text{М}}}{E_2(1-\lambda)}. \qquad (3.25)$$

Таким образом, прочность композита при растяжении поперёк волокон может быть значительно меньше, чем прочность матрицы. Аналогичное заключение можно сделать и в отношении предела прочности при сдвиге в плоскости слоя $\sigma_{12\text{в}}$.

4 РАСЧЁТ СЛОИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

Композиционные элементы конструкций обычно изготавливаются путём наслаивания с заданной ориентацией слоёв. Механическое поведение таких слоистых композитов изучается в макромеханике. Общепринятый метод их исследования основан на теории слоистых пластин или оболочек, в которой принимается гипотеза о линейном изменении перемещений по толщине пакета.

4.1 Преобразование упругих характеристик однонаправленного материала при повороте системы координат

Рассмотрим преобразование упругих характеристик однонаправленного материала при переходе от естественных для него (связанных с его микроструктурой) осей координат (1, 2) к некоторой произвольно ориентированной системе координат (x, y), полученной вращением осей (1, 2) вокруг оси, ортогональной плоскости 1-2 на некоторый угол θ (рисунок 4.1).

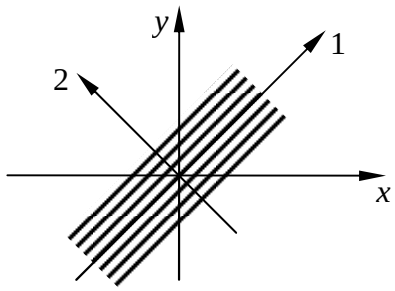


Рисунок 4.1 – Системы координат однонаправленного материала

Соотношения связи между средними напряжениями и деформациями в однонаправленном слое в осях (1, 2) при плоском напряжённом состоянии ($\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$) имеют вид

$$[\bar{\sigma}] = [\bar{\kappa}][\bar{\varepsilon}] \tag{4.1}$$

или

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} & \bar{\kappa}_{12} & 0 \\ \bar{\kappa}_{21} & \bar{\kappa}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\kappa}_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix},$$

где

$$\bar{\kappa}_{11} = \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}}; \qquad \bar{\kappa}_{22} = \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}}; \qquad \bar{\kappa}_{44} = G_{12};$$

$$\bar{\kappa}_{12} = \bar{\kappa}_{21} = \frac{\mu_{21}E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} = \frac{\mu_{12}E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}}.$$

$$[T_2]^{-1}[\varepsilon]=[\bar{\Phi}][T_1]^{-1}[\sigma] \quad \text{или} \quad [\varepsilon]=[T_2][\bar{\Phi}][T_1]^{-1}[\sigma].$$

Эти соотношения позволяют записать формулу для матрицы податливости материала в осях (x, y):

$$[\Phi]=[T_2][\bar{\Phi}][T_2]^{\mathrm{T}}. \qquad (4.10)$$

4.2 Упругие характеристики многослойных композитов при плоском напряжённом состоянии

Как отмечалось ранее, основным недостатком однонаправленных материалов являются их низкие механические свойства в поперечном направлении. Поэтому композитные элементы конструкций обычно изготавливают из нескольких монослоёв, ориентируя их в разных направлениях. После полимеризации в автоклаве многослойный пакет образует монолитный неоднородный материал с некоторыми прочностными и жесткостными характеристиками. Требуемые значения этих характеристик достигаются соответствующим подбором структурных параметров, таких как число слоёв n, их толщины $h^{(k)}$, углы ориентации $\theta^{(k)}$ и последовательность укладки слоёв.

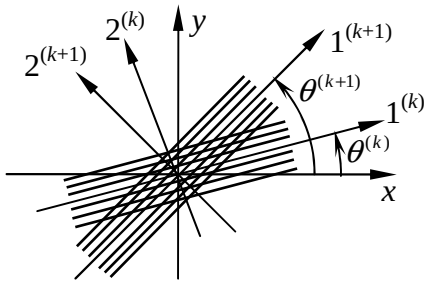


Рисунок 4.2 – Укладка слоёв под различными углами

Пусть композит образован несколькими разноориентированными слоями однонаправленного материала (рисунок 4.2). Введём следующие системы координат: общую (x, y) и местные однонаправленных слоёв $(1, 2)^{(k)}$. Здесь k – номер однонаправленного слоя в пакете многослойного материала.

Необходимо определить характеристики многослойного композита, если известны характеристики жёсткости (податливости) входящих в него слоёв.

Выделим многослойный параллелепипед единичной длины и ширины (рисунок 4.3). Действующие по его боковым граням погонные силы (т.е. силы, приходящиеся на единицу длины) определяются из следующих очевидных уравнений равновесия:

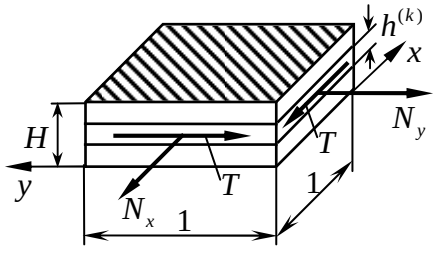


Рисунок 4.3 – Элемент пакета

$$N_x=\sum_{k=1}^{n}\sigma_{xx}^{(k)}h^{(k)}; \qquad N_y=\sum_{k=1}^{n}\sigma_{yy}^{(k)}h^{(k)}; \qquad T=\sum_{k=1}^{n}\sigma_{xy}^{(k)}h^{(k)}. \qquad (4.11)$$

Разделив правые и левые части этих уравнений на суммарную толщину пакета $H = \sum_{k=1}^{n} h^{(k)}$, получим

$$\sigma_{xx} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{xx}^{(k)} \overline{h}^{(k)}; \qquad \sigma_{yy} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{yy}^{(k)} \overline{h}^{(k)}; \qquad \sigma_{xy} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{xy}^{(k)} \overline{h}^{(k)}. \qquad (4.12)$$

Здесь $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ – средние по толщине пакета слоёв напряжения, равные

$$\sigma_{xx} = N_x / H; \qquad \sigma_{yy} = N_y / H; \qquad \sigma_{xy} = T / H;$$

$\overline{h}^{(k)} = h^{(k)} / H$ – относительная толщина k-го слоя.

Средние деформации пакета и деформации отдельных слоёв согласно условию совместности будут одинаковыми, т.е.

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^{(k)}; \qquad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}^{(k)}; \qquad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^{(k)}.$$

С учетом этого закон Гука для k-го слоя в осях (x, y) можно записать в виде

$$[\sigma^{(k)}] = [\kappa^{(k)}][\varepsilon^{(k)}] = [\kappa^{(k)}][\varepsilon], \qquad (4.13)$$

где

$$[\kappa^{(k)}] = [T_1(\theta^{(k)})]\,[\overline{\kappa}^{(k)}]\,[T_1(\theta^{(k)})]^{\mathrm{T}}$$

– матрица жёсткости материала слоя k в общей системе координат (x, y).

Подставив выражение (4.13) в соотношения (4.12), получим уравнение связи средних напряжений со средними деформациями многослойного материала при плоском напряжённом состоянии:

$$[\sigma] = [\kappa][\varepsilon]$$

или

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{14} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{24} \\ \kappa_{41} & \kappa_{42} & \kappa_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix},$$

где

$$[\kappa] = \sum_{k=1}^{n} [\kappa^{(k)}] \overline{h}^{(k)} \qquad \text{или} \qquad \kappa_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \kappa_{ij}^{(k)} \overline{h}^{(k)}. \qquad (4.14)$$

Из (4.14) непосредственно следует, что порядок чередования слоёв в пакете многослойного материала не имеет значение при подсчёте его жёсткостей κ_{ij}. Если каждый слой из некоторой группы слоёв имеет одинаковые

жёсткости $\kappa_{ij}^{(k)}$ (например, это слои одного однонаправленного материала, уложенные с одинаковым углом θ), то эта группа слоёв может здесь считаться одним слоем с толщиной, равной сумме толщин слоёв, входящих в данную группу.

Исследования показывают, что для получения требуемых характеристик нет необходимости применения сложных схем армирования. Во многих случаях можно ограничиться лишь четырьмя направлениями: 0°, 90°, ±45°. При этом формулы (4.14) заметно упрощаются. Рассмотрим три вида структур, часто используемых при создании конструкций из композиционных материалов.

Ортогонально армированные материалы. Такие материалы состоят из n слоёв, из которых часть уложена под углом $\theta^{(1)} = 0^{\circ}$, а остальные слои – под углом $\theta^{(2)} = 90^{\circ}$ (рисунок 4.4).

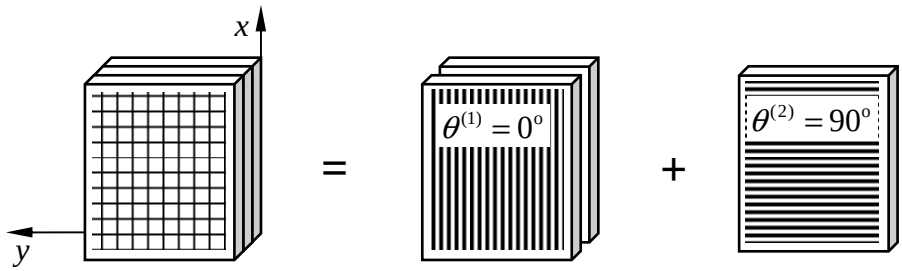


Рисунок 4.4 – Ортогонально армированный материал

Обозначим суммарную относительную толщину слоёв первого типа через $\overline{h}^{(1)}$, а второго типа через $\overline{h}^{(2)}$. Пусть все слои выполнены из одного однонаправленного материал с жесткостными характеристиками $\overline{\kappa}_{ij}$. Тогда

$$\begin{gathered} \kappa_{11} = \overline{\kappa}_{11} h^{(1)} + \overline{\kappa}_{22} h^{(2)}; \qquad \kappa_{22} = \overline{\kappa}_{22} h^{(1)} + \overline{\kappa}_{11} h^{(2)}; \\ \kappa_{12} = \overline{\kappa}_{12}; \qquad \kappa_{44} = \overline{\kappa}_{44}; \qquad \kappa_{14} = \kappa_{24} = 0. \end{gathered} \tag{4.15}$$

Структура матрицы жёсткости этого материала ($\kappa_{14} = \kappa_{24} = 0$) позволяет считать его ортотропным. При этом главные оси ортотропии будут совпадать с осями x, y.

Перекрёстно армированные материалы. Такие материалы состоят из $2n$ слоёв, из которых n сдоёв уложены под углом θ к оси x, а остальные под углом минус θ (рисунок 4.5).

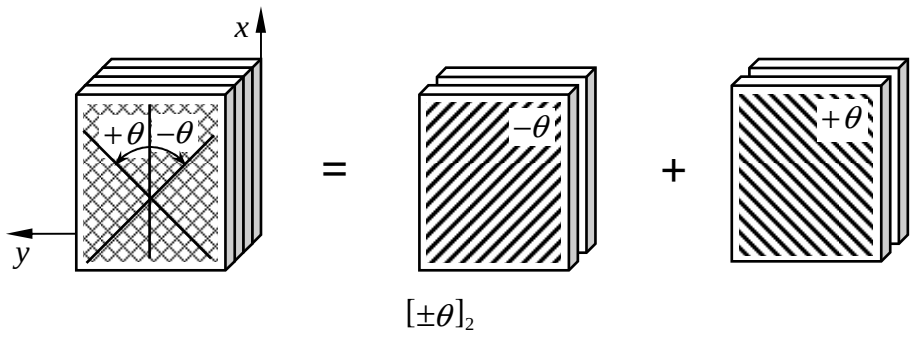


Рисунок 4.5 – Перекрёстно армированный материал

В этом случае

$$\kappa_{11}=\frac{1}{2}\left(\kappa_{11}^{(1)}+\kappa_{11}^{(2)}\right)=\kappa_{11}^{(1)};\qquad \kappa_{22}=\frac{1}{2}\left(\kappa_{22}^{(1)}+\kappa_{22}^{(2)}\right)=\kappa_{22}^{(1)};$$

$$\kappa_{12}=\frac{1}{2}\left(\kappa_{12}^{(1)}+\kappa_{12}^{(2)}\right)=\kappa_{12}^{(1)};\qquad \kappa_{44}=\frac{1}{2}\left(\kappa_{44}^{(1)}+\kappa_{44}^{(2)}\right)=\kappa_{44}^{(1)};\qquad (4.16)$$

$$\kappa_{14}=\kappa_{24}=0.$$

Следует отметить, что в реальных слоистых композитах слою с углом армирования $+\theta$, как правило, соответствует такой же слой с углом армирования $-\theta$. Такие два слоя естественно рассматривать при расчёте как один симметрично армированный слой. Это позволяет значительно упростить соотношения, связывающие напряжения и деформации. Действительно, если каждый из симметричных слоёв является анизотропным в координатах (x, y), то, работая совместно, они образуют ортотропный слой, закон Гука для которого имеет более простую форму записи.

Квази-изотропные материалы. Рассмотрим многослойный композит с ориентацией одинаковых слоёв одной толщины под углами $\theta^{(k)}=k\pi/n$, где $k=1,2,\ldots,n$ и $n\geq 3$. Простейшими примерами таких материалов являются композиты со схемой укладки слоёв [30/-30/90] или [0/45/90/-45].

Можно показать, что рассматриваемые материалы являются изотропными в плоскости (x, y).

4.3 Изгиб многослойных композиционных материалов

Установим соотношения упругости при изгибе многослойных композитов. Будем считать, что слои материала идеально связаны между собой (т.е.

отсутствует проскальзывание слоёв). Классическая теория пластин, основанная на гипотезе Кирхгофа, даёт следующие выражения для деформаций:

$$\varepsilon_{xx} = e_{xx} + z\chi_{xx}; \qquad \varepsilon_{yy} = e_{yy} + z\chi_{yy}; \qquad \gamma_{xy} = e_{xy} + z\chi_{xy}$$

или в матричном виде

$$[\varepsilon] = [e] + z[\chi], \tag{4.17}$$

где z – расстояние от некоторой координатной (так называемой отсчётной) плоскости, за которую может быть принята любая плоскость, параллельная границам слоёв многослойного материала (рисунок 4.6); $[e] = \{e_{xx} \;\; e_{yy} \;\; e_{xy}\}$ – матрица-столбец деформаций отсчётной плоскости; $[\chi] = \{\chi_{xx} \;\; \chi_{yy} \;\; \chi_{xy}\}$ – матрица-столбец изменений кривизн пластины.

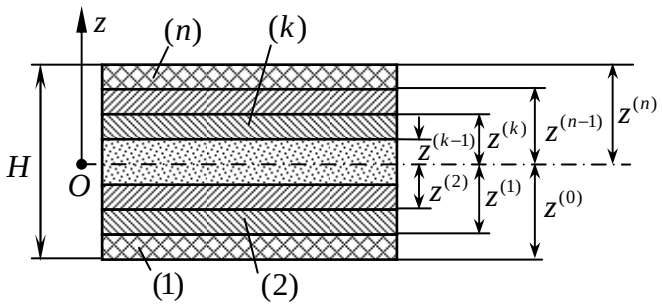


Рисунок 4.6 – Сечение многослойного пакета

Подставляя (4.17) в выражение для напряжений в k-ом слое (4.13) с учётом условий совместности деформаций, имеем

$$[\sigma^{(k)}] = [\kappa^{(k)}]\left([e] + z[\kappa]\right). \tag{4.18}$$

Для следующего в пакете слоя запись аналогична:

$$[\sigma^{(k+1)}] = [\kappa^{(k+1)}]\left([e] + z[\kappa]\right).$$

Из этих соотношений видно, что, несмотря на линейное распределение деформаций по толщине пакета слоёв, напряжения в общем случае распределены кусочно-линейно и при $[\kappa^{(k)}] \neq [\kappa^{(k+1)}]$ скачкообразно изменяются на границах слоёв.

При изгибе характеристиками напряжённого состояния композита могут служить погонные силы $[N] = \{N_x \;\; N_y \;\; T\}$ и моменты $[M] = \{M_x \;\; M_y \;\; M_{xy}\}$:

$$\begin{cases} N_x = \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \sigma_{xx}^{(k)} dz \quad (x \rightleftarrows y); \\ T = \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \sigma_{xy}^{(k)} dz; \end{cases} \tag{4.19}$$

$$\begin{cases} M_x = \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \sigma_{xx}^{(k)} z dz \quad (x \rightleftarrows y); \\ M_{xy} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \sigma_{xy}^{(k)} z dz. \end{cases} \tag{4.20}$$

Здесь $z^{(k)}$ – расстояние от отсчётной плоскости до верхней поверхности k-го слоя (см. рисунок 4.6). Если в качестве отсчётной выбирается срединная плоскость, то $z^{(0)} = -H/2$.

Использование в (4.19) и (4.20) сумм интегралов позволяет учесть кусочно-линейный характер распределения напряжений по толщине пакета.

Подставив в (4.19) и (4.20) выражения для напряжений (4.18), получим

$$[N] = \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [\kappa^{(k)}] dz [e] + \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [\kappa^{(k)}] z dz [\chi]; \tag{4.21}$$

$$[M] = \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [\kappa^{(k)}] z dz [e] + \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [\kappa^{(k)}] z^2 dz [\chi]. \tag{4.22}$$

Используя подматрицы, перейдём к следующей компактной записи:

$$\left[\begin{array}{c} N \\ \hline M \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & D \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} e \\ \hline \chi \end{array}\right], \tag{4.23}$$

где $[A]$ – матрица мембранных жесткостей; $[D]$ – матрица изгибных жесткостей; $[B]$ – матрица мембранно-изгибных жесткостей, отвечающая за взаимосвязь сил и изменений кривизн, моментов и деформаций. Равенство нулю всех компонент матрицы $[B]$ говорит об отсутствии такой связи.

Матрицы $[A]$, $[B]$ и $[D]$ симметричны, а их компоненты, как это следует из (4.21) и (4.22), определяются как

$$[A] = \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [\kappa^{(k)}] dz; \qquad [B] = \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [\kappa^{(k)}] z dz; \qquad [D] = \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [\kappa^{(k)}] z^2 dz. \tag{4.23}$$

Если коэффициенты матрицы $[\kappa^{(k)}]$ постоянны в каждом из слоёв пакета, то, выполнив интегрирование в (4.23), получим

$$[A]=\sum_{k=1}^{n}[\kappa^{(k)}]\left(z^{(k)}-z^{(k-1)}\right);$$

$$[B]=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[\kappa^{(k)}]\left\{\left(z^{(k)}\right)^2-\left(z^{(k-1)}\right)^2\right\}; \qquad (4.24)$$

$$[D]=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}[\kappa^{(k)}]\left\{\left(z^{(k)}\right)^3-\left(z^{(k-1)}\right)^3\right\}.$$

Сопоставив (4.14) и первое соотношение (4.24), заметим, что

$$[A]=[\kappa]H\,.$$

Конкретный вид выражений (4.24) зависит от структуры пакета слоёв многослойного композита и расположения отсчётной плоскости. Для ряда частных случаев эти выражения заметно упрощаются.

Следует отметить, что «дробление» общей толщины перекрёстно армированных композитов позволяет значительно «улучшить» структуру матрицы жёсткости пакета, уменьшая величину коэффициентов, отвечающих за взаимосвязь мембранных и изгибных параметров напряжённо-деформированного состояния. Более того, пару слоёв с углами армирования $\pm\theta$ (если таким пар достаточно много) можно рассматривать как единый ортотропный слой.

В заключение отметим, что компоненты матрицы $[B]$ при симметричной структуре пакета слоёв многослойного материала обращаются в нуль лишь в том случае, когда в качестве отсчётной выбрана срединная плоскость пакета. Если структура пакета несимметрична, выбор в качестве отсчётной плоскости срединной не приводит к упрощению соотношений (4.24). В этом случае при выборе отсчётной плоскости могут оказаться решающими другие соображения. Так, при расчёте оболочек вращения переменной толщины и структуры, полученных намоткой ленты однонаправленного материала на оправку заданной формы, удобно в качестве отсчётной выбрать внутреннюю поверхность оболочки, геометрия которой известна.

5 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ КОМПОЗИТОВ

5.1 Структурный и феноменологический подходы

Прочность однонаправленного материала так же, как и слоистого композита, составленного из различно ориентированных однонаправленных слоёв, может быть исследована с помощью двух основных подходов: структурного и феноменологического. Подход к анализу разрушения с позиций микромеханики (структурный) связывает прочностные характеристики композита с характеристиками составляющих его компонентов. Здесь необходимо построить структурную модель материала, определить напряжения (деформации) в компонентах и сравнить их с предельными значениями. В настоящее время этот метод представляется труднореализуемым.

При феноменологическом подходе неоднородный композит рассматривается как сплошная среда (однородный анизотропный материал), математическая модель которой максимально учитывает экспериментальные данные о прочности. Предложено много разновидностей феноменологических критериев разрушения (прочности) для анизотропных материалов. Наиболее популярными среди них являются критерий максимальных напряжений (деформаций) и квадратичные полиномиальные критерии, такие как критерии Хилла-Мизеса, Цая-Ву, Чамиса-Хоффмана.

В работах Е.К. Ашкинази, И.И. Гольденблата и В.А. Копнова сделаны первые попытки создать обобщённую тензорную теорию прочности композитов. Общее описание поверхностей прочности в виде тензорного полинома предложено в 1966 г. А.К. Малмейстером и широко развито С.В. Цаем и Э.М. Ву. Отметим, что все перечисленные выше критерии разрушения представляют собой частные случаи тензорно-полиномиальной формулировки, которая является наиболее гибкой и не содержит при этом чрезмерного количества параметров.

Для многослойных композитов часто применяется структурно-феноменологическая модель. Феноменологический подход используется для описания поведения однонаправленного монослоя, а структурный – для рассмотрения многослойного материала, составленного из разноориентированных монослоёв. Здесь требуется теория слоистых сред, позволяющая осуществлять переход от напряжений и деформаций композита к напряжениям и деформациям в любом его слое.

5.2 Критерии разрушения однонаправленного композиционного материала

Для описания разрушения однонаправленного композиционного материала воспользуемся феноменологическим подходом, состоящим в создании достаточно простой математической модели, максимально учитывающей результаты экспериментов. В основу этого подхода положена гипотеза, согласно которой волокнистый композит считается однородным анизотропным материалом.

При отсутствии других внешних воздействий (химических, тепловых, радиационных и т.д.) разрушение материала обычно связывают с напряжённым состоянием. При этом критерий разрушения можно записать в виде

$$f\left(\sigma_{ij}, F\right) = 0, \tag{5.1}$$

где F – некоторые характеристики прочности материала.

Уравнение (5.1) для анизотропного материала отличается от аналогичного уравнения для изотропного материала прежде всего тем, что в случае изотропии F представляет собой единственную скалярную константу (например, предел прочности $\sigma_{\text{в}}$), а для анизотропного материала F может быть совокупностью многих параметров материала, вид которой определяется конкретной записью критерия разрушения.

Феноменологические критерии разрушения не выводятся аналитически, они постулируются или предлагаются на основе обобщения экспериментальных данных. Геометрически критерий разрушения можно интерпретировать как некоторую предельную поверхность в пространстве напряжений (рисунок 5.1), т.е. условия разрушения выполняются в тот момент, когда заданный вектор напряжений пересекает эту поверхность, называемую поверхностью прочности.

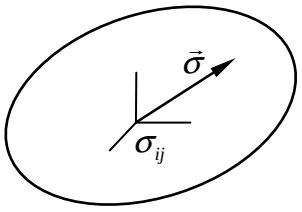


Рисунок 5.1 – Поверхность прочности

Предложено большое количество различных критериев разрушения анизотропных тел. Как отмечалось ранее, наиболее общим среди них является тензорно-полиномиальный критерий. В матричных обозначениях он имеет вид

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j + F_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k + \ldots = 1 \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, 6), \tag{5.2}$$

коэффициент F_{12}, характеризующий взаимное влияние напряжений σ_{11} и σ_{22} на прочность материала, находится из экспериментов при двухосном напряженном состоянии.

Оценка прочности с использованием критерия Цая-Ву выполняется следующим образом. Вычисляется выражение, стоящее в левой части уравнения (5.6). Если полученное значение меньше единицы, то условие прочности удовлетворяется. В противном случае происходит разрушение материала.

Необходимость экспериментального определения смешанного коэффициента F_{12} является наиболее неприятной особенностью данного критерия.

Существует большое количество модификаций критерия Цая-Ву, не требующих экспериментального определения смешанного коэффициента. Как правило, F_{12} выражают через другие коэффициенты уравнения (5.6). Так, согласно критерию Хоффмана (Hoffman)

$$F_{12} = -\frac{F_{11}}{2}; \tag{5.7}$$

по критерию Ханкинсона (Hankinson)

$$F_{12} = \frac{F_{11} + F_{22} - F_{44}}{2}; \tag{5.8}$$

в соответствии с критерием Коуина (Cowin)

$$F_{12} = \sqrt{F_{11}F_{22}} - \frac{F_{44}}{2}. \tag{5.9}$$

Из квадратичных критериев разрушения следует отметить ещё критерий Хилла-Мизеса (Hill-Mises), получивший широкое применение в отечественной практике. В данном случае в уравнении (5.6) линейные члены полагаются равными нулю (т.е. $F_1 = F_2 = 0$), а остальные коэффициенты выражаются как

$$F_{11} = \frac{1}{\sigma_{1в}^2}; \quad F_{22} = \frac{1}{\sigma_{2в}^2}; \quad F_{44} = \frac{1}{\sigma_{12в}^2}; \quad F_{12} = -\frac{F_{11}}{2}, \tag{5.10}$$

где

$$\sigma_{1в} = \begin{cases} \sigma_{1в}^{+}, & \text{если} \quad \sigma_{11} \geq 0 \\ \sigma_{1в}^{-}, & \text{если} \quad \sigma_{11} < 0 \end{cases}; \qquad \sigma_{2в} = \begin{cases} \sigma_{2в}^{+}, & \text{если} \quad \sigma_{22} \geq 0 \\ \sigma_{2в}^{-}, & \text{если} \quad \sigma_{22} < 0 \end{cases}.$$

Для однонаправленного волокнистого композита, признавая различие разрушения, определяемого волокнами, и разрушения, определяемого связующим, критерий (5.6) можно разделить на два:

$$F_1\sigma_1 + F_{11}\sigma_1^2 = 1 \text{ – разрушение волокон;} \qquad (5.11)$$

$$F_2\sigma_2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{44}\sigma_4^2 = 1 \text{ – разрушение связующего.} \qquad (5.12)$$

При записи данных соотношений предполагалось, что ось 1 направлена вдоль волокон, а ось 2 – ортогональна им.

Феноменологический подход имеет один серьёзный недостаток. Для однонаправленных композитов это необходимость повторения всех экспериментов по определению компонент тензоров поверхности прочности при любом изменении характеристик волокна и матрицы, объёмной доли компонентов, технологии изготовления материала и т.д. Экспериментальное определение нужного набора констант прочности однонаправленного материала, как правило, является весьма сложной и дорогостоящей технической задачей. Поэтому обычно здесь ограничиваются нахождением простых пределов прочности при одноосном нагружении.

Проведённые эксперименты с типичными однонаправленными композитами позволяют установить, что вид разрушения зависит от типа напряжённого состояния. На рисунке 5.3 представлены схематично некоторые из характерных видов разрушения.

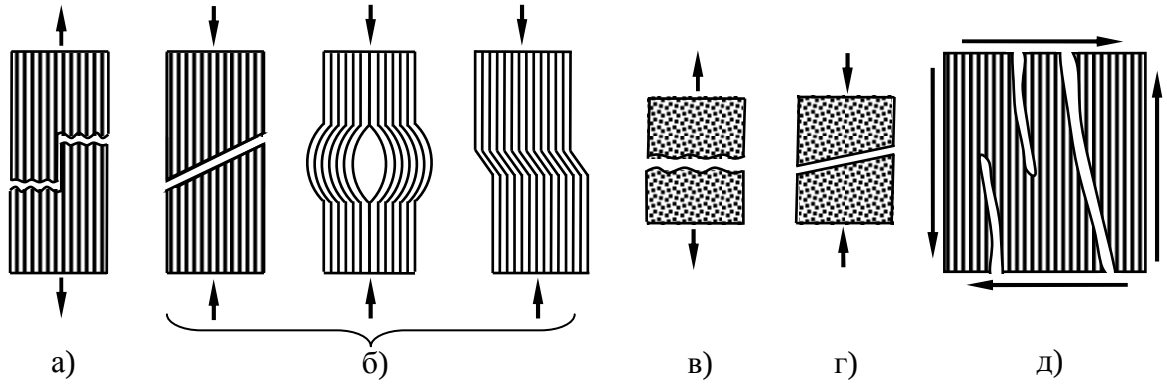


Рисунок 5.3 – Схемы разрушения волокнистых композитов

Здесь на рисунке:

а) разрушение при растяжении вдоль волокон, сопровождающееся разрывом волокон;

б) разрушение при сжатии вдоль волокон, вызванное «сколом» или расслоением, сопровождающееся потерей устойчивости волокон либо сдвиговой формой потери устойчивости;

в) разрушение связующего и/или адгезионной связи волокон и связующего при растяжении поперёк волокон;

г) разрушение композита, вызванное сдвиговыми напряжениями при сжатии поперёк волокон;

д) расслоение материала, вызванное сдвиговыми напряжениями в плоскости образца.

Простейшая гипотеза о поведении однонаправленного материала состоит в том, что эти виды разрушения взаимно независимы и разрушение наступает тогда, когда предельных значений (определённых в эксперименте) достигают в отдельности напряжения σ_{11}, σ_{22} или σ_{12}. Таким образом, приходим к критерию максимальных напряжений, для которого условие прочности в главных осях анизотропии материала имеет вид

$$\begin{cases} \sigma_{1в}^{-} < \sigma_{11} < \sigma_{1в}^{+} \\ \sigma_{2в}^{-} < \sigma_{22} < \sigma_{2в}^{+} \\ |\sigma_{12}| < \sigma_{12в} \end{cases}. \qquad (5.13)$$

Поверхностью прочности здесь является прямоугольный параллелепипед (рисунок 5.4), выход за которую означает исчерпание несущей способности материала.

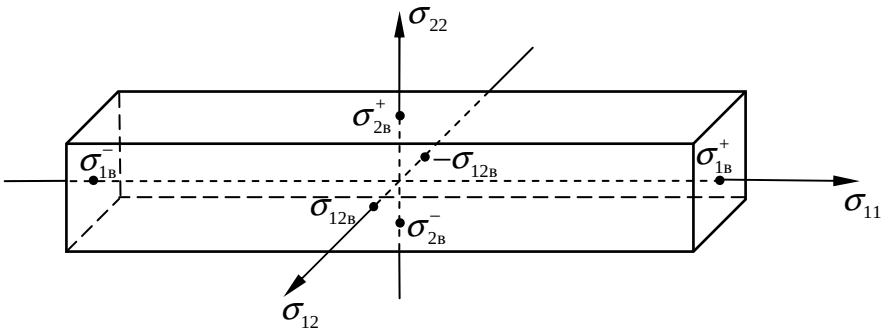


Рисунок 5.4 – Поверхность прочности критерия максимальных напряжений

Представление критерия (5.13) в виде

$$\left(\sigma_1 - \sigma_{1в}^{+}\right)\left(\sigma_1 - \sigma_{1в}^{-}\right)\left(\sigma_2 - \sigma_{2в}^{+}\right)\left(\sigma_2 - \sigma_{2в}^{-}\right)\left(\sigma_4 - \sigma_{12в}\right)\left(\sigma_4 + \sigma_{12в}\right) = 0$$

позволяет после раскрытия скобок записать его в инвариантной тензорно-полиномиальной форме (5.2). При этом, однако, запись критерия (5.13) переходит в соотношение весьма громоздкого вида, включающее тензоры поверхности прочности вплоть до 12 ранга.

Прямоугольный параллелепипед – одна из простейших геометрических моделей поверхности прочности однонаправленного материала, которая конечно может уточняться, например, по результатам экспериментов по разрушению материала при различных комбинациях σ_{11}, σ_{22} и σ_{12}. Однако, поскольку для современных высокопрочных однонаправленных полимерных композитов $\sigma^{+}_{2в} \approx (0,01\ldots0,08)\sigma^{+}_{1в}$, эффективность такого уточнения не всегда соизмерима с потребными затратами.

Иногда удобно записывать критерий разрушения не через напряжения, а через деформации. Наиболее известным здесь является критерий максимальных деформаций.

При оценке прочностных характеристик многослойного композита обычно предполагают, что его несущая способность исчерпывается при разрушении хотя бы одного монослоя. Данная процедура сводится к нахождению компонент напряжений в каждом слое с учётом ориентации волокон в нём, т.е. в местной системе координат (1, 2), и применению к каждому слою какого-либо феноменологического критерия разрушения при сложном напряжённом состоянии. В подавляющем большинстве случаев можно считать, что каждый монослой работает в условиях плоского напряжённого состояния. Поэтому здесь, как правило, приходится учитывать лишь три компоненты σ_{11}, σ_{22} и σ_{12}.

Следует отметить, что в монослое слоистого материала при произвольном нагружении действуют не только продольные (в направлении волокон), но и поперечные нормальные, а также касательные напряжения. Последние могут вызвать нарушение монолитности, выражающееся в появлении в связующем параллельно волокнам трещин значительно раньше разрушения волокон. Для конструкций из полимерных композиционных материалов это явление не приводит к существенному снижению несущей способности при данных условиях нагружения, однако может привести к недопустимому снижению прочности по отношению к другим видам нагружения, появлению нежелательных эффектов, таких как потеря герметичности, проникновение влаги, накопление остаточных деформаций и др.

Таким образом, при расчёте и проектировании авиационных конструкций здесь можно рекомендовать следующий подход:

- при эксплуатационных нагрузках не должно возникать остаточных деформаций и местных разрушений, включая нарушение монолитности материала;
- при нагрузках, меньших или равных расчётным, конструкция не должна терять несущей способности.

Итак, при эксплуатационных нагрузках границей области допустимых напряжений является поверхность первичного разрушения (т.е. разрушения связующего), которую можно описать, например, уравнением (5.12), а при расчётных нагрузках – поверхность вторичного разрушения (т.е. разрушения волокон), которую можно уже описать уравнением (5.11).

6 ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Расчёт композитных элементов конструкций осуществляется, как правило, на основе обычных теорий и методов строительной механики, однако, с помощью соотношений, учитывающих специфические особенности армированных слоистых материалов. Ввиду того, что уравнения равновесия и геометрические соотношения от свойств материала не зависят, эти особенности должны учитываться физическими соотношениями, связывающими напряжения и деформации.

6.1 Стержни из композиционных материалов

Высокопрочные и высокомодульные композиционные материалы успешно применяются для изготовления слоистых стержней и усиления металлических профилей, работающих на растяжение, сжатие и изгиб.

Рассмотрим изгиб многослойного стержня в плоскости *xy* (рисунок 6.1). Многослойность приводит к особенностям в подсчёте геометрических характеристик поперечного сечения.

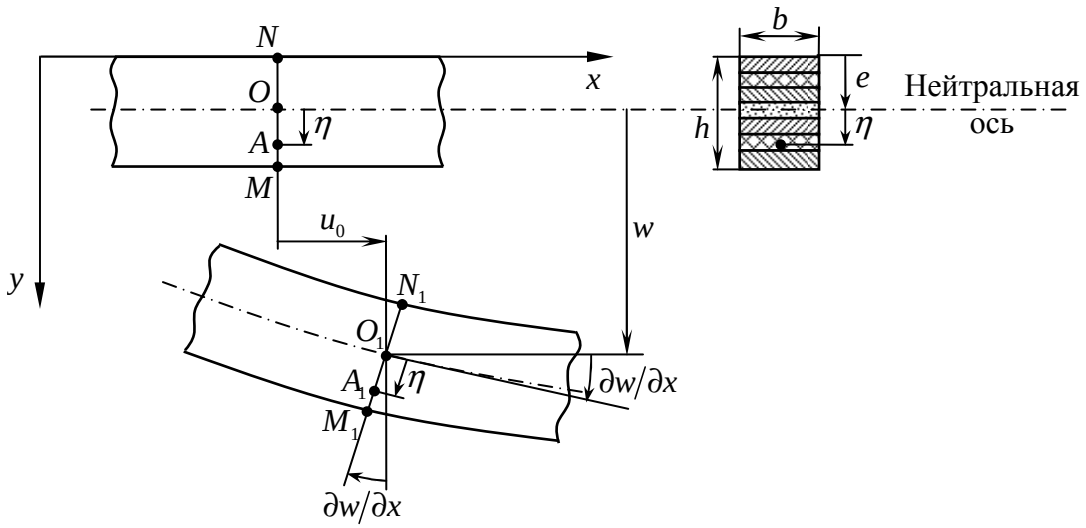


Рисунок 6.1 – Изгиб многослойного стержня

Согласно закону плоских сечений Бернулли-Эйлера сечения стержня при изгибе остаются плоскими и перпендикулярными нейтральной оси. Рассмотрим перемещения и деформации, возникающие в многослойной балке. Продольные перемещения в этом случае распределяются по высоте стержня по линейному закону:

$$u = u_0 - \eta w', \tag{6.1}$$

где $u_0(x)$ – осевое перемещение точек нейтральной оси; $w(x)$ – прогиб. Здесь и далее штрихом обозначается производная по координате x.

Деформация в продольном направлении определяется выражением

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = u_0' - \eta\, w'', \tag{6.2}$$

а соответствующее напряжение – законом Гука:

$$\sigma_{xx} = E_x \varepsilon_{xx} = E_x \left(u_0' - \eta\, w''\right), \tag{6.3}$$

где E_x – продольный модуль упругости.

Как известно, при осевом нагружении и изгибе напряжения в поперечном сечении сводятся к осевой силе N и изгибающему моменту M:

$$N = \int_0^h \sigma_{xx}\, b dy = u_0' \int_0^h E_x\, b dy - w'' \int_0^h E_x\, b\eta dy = B u_0' - S w''; \tag{6.4}$$

$$N = \int_0^h \sigma_{xx}\, b\eta dy = u_0' \int_0^h E_x\, b\eta dy - w'' \int_0^h E_x\, b\eta^2 dy = S u_0' - D w'', \tag{6.5}$$

где обозначено

$$B = \int_0^h E_x\, b dy; \qquad S = \int_0^h E_x\, b\eta dy; \qquad D = \int_0^h E_x\, b\eta^2 dy.$$

Положение нейтральной оси находится из условия $S = 0$. Учитывая, что $\eta = y - e$ (см. рисунок 6.1), получим

$$S = \int_0^h E_x\, b(y - e) dy = \int_0^h E_x\, b\, y\, dy - e \int_0^h E_x\, b dy = C_1 - Be = 0,$$

откуда

$$e = \frac{C_1}{B}, \tag{6.6}$$

где

$$C_1 = \int_0^h E_x\, b\, y\, dy.$$

В этом случае N будет связана только с деформацией нейтральной оси, а M – с её кривизной:

$$N = B u_0'; \qquad M = -D w'', \tag{6.7}$$

где B и D – жёсткости стержня при растяжении-сжатии и изгибе соответственно.

С учётом равенства $\eta = y - e$ и выражения (6.6) для изгибной жёсткости имеем

$$D = \int_0^h E_x b(y-e)^2 dy = \int_0^h E_x b y^2 dy - 2e\int_0^h E_x b y dy + e^2 \int_0^h E_x b dy =$$

$$= C_2 - 2eC_1 + e^2 B = C_2 - 2\frac{C_1^2}{B} + \frac{C_1^2}{B}$$

или

$$D = C_2 - \frac{C_1^2}{B}, \tag{6.8}$$

где

$$C_2 = \int_0^h E_x b y^2 dy .$$

Далее из выражений для N и M (6.7) находим

$$u_0' = \frac{N}{B}; \qquad w'' = -\frac{M}{D}.$$

С учётом этого формула для напряжения (6.3) примет вид

$$\sigma_{xx} = E_x \left[\frac{N}{B} + \frac{M}{D}(y-e) \right]. \tag{6.9}$$

В полученных соотношениях предполагалось, что ширина сечения b и продольный модуль упругости E_x произвольно изменяются по высоте стержня, т.е. $b = b(y)$; $E_x = E_x(y)$.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть $b = const$ и $E_x = const$, т.е. стержень имеет прямоугольное сечение и является однородным.

Тогда

$$B = \int_0^h E_x b dy = E_x bh;$$

$$C_1 = \int_0^h E_x b y dy = E_x b \int_0^h y dy = \frac{1}{2} E_x bh^2;$$

$$C_2 = \int_0^h E_x b y^2 dy = E_x b \int_0^h y^2 dy = \frac{1}{3} E_x b h^3;$$

$$e = \frac{C_1}{B} = \frac{E_x b h^2}{2 E_x b h} = \frac{h}{2};$$

$$D = C_2 - \frac{C_1^2}{B} = E_x b h^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{12} E_x b h^3.$$

Таким образом, в однородном стержне нейтральная ось располагается на средине высоты. Отметим, что аналогичный результат получается и в более общем случае, когда сечение симметрично относительно средней линии $y = h/2$.

2. Рассмотрим общий случай слоистого стержня (рисунок 6.2).

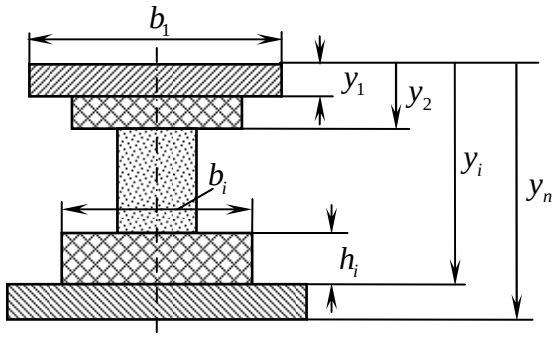


Рисунок 6.2 – Многослойное сечение произвольной формы

Учитывая, что в пределах каждого слоя ширина и модуль упругости постоянны, находим

$$B = \int_0^h E_x b dy = \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} E_x^{(i)} b_i dy = \sum_{i=1}^n E_x^{(i)} b_i \left(y_i - y_{i-1} \right) = \sum_{i=1}^n E_x^{(i)} b_i h_i;$$

$$C_1 = \int_0^h E_x b y dy = \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} E_x^{(i)} b_i y dy = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_x^{(i)} b_i \left(y_i^2 - y_{i-1}^2 \right);$$

$$C_2 = \int_0^h E_x b y^2 dy = \sum_{i=1}^n \int_{y_{i-1}}^{y_i} E_x^{(i)} b_i y^2 dy = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n E_x^{(i)} b_i \left(y_i^3 - y_{i-1}^3 \right);$$

$$e = \frac{C_1}{B}; \qquad D = C_2 - \frac{C_1^2}{B}.$$

Здесь n – общее число слоёв; $E_x^{(i)}$, b_i – модуль упругости и ширина i-го слоя; y_i – расстояние от верхней кромки сечения до нижней кромки i-го слоя, причём $y_0 = 0$, а $y_n = h$.

Таким образом, слоистые стержни рассчитываются аналогично однородным, при этом особенность заключается в подсчёте жесткостей на растяжение-сжатие и изгиб.

В заключение отметим, что данные соотношения получены с использованием кинематической модели Бернулли-Эйлера (т.е. гипотезы плоских сечений), которая не учитывает деформации поперечного сдвига. Однако для композитных стержней эти деформации за счёт межслоевой сдвиговой податливости могут быть весьма значительными. Поэтому здесь лучше воспользоваться кинематической моделью Тимошенко, позволяющей в первом приближении учесть деформации поперечного сдвига.

6.2 Композитные пластины

6.2.1 Исходные допущения

Элементы конструкций, изготовленные из волокнистых композиционных материалов, как правило, являются тонкостенными. Они образуются из ограниченного числа слоёв, причём суммарная толщина этих слоёв, даже будучи достаточно большой, всегда значительно меньше по крайней мере одного из двух других размеров элемента. Таким образом, композитные элементы в большинстве случаев могут быть описаны с помощью традиционных расчётных схем – тонкостенных стержней, балок, пластин и оболочек.

Для того чтобы выявить, к каким упрощениям приводит отмеченная особенность, рассмотрим слоистую плиту, нагруженную как в плоскости слоёв, так и нормально к ним (рисунок 6.3). Введём безразмерные координаты:

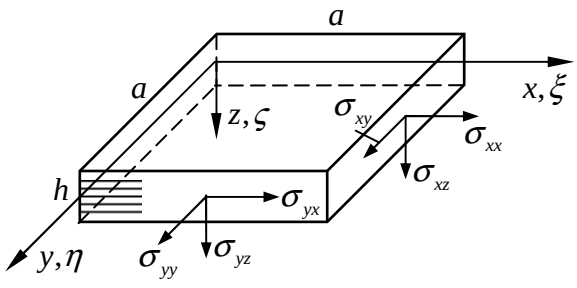


Рисунок 6.3 – Слоистая плита

$$\xi = \frac{x}{a}; \qquad \eta = \frac{y}{a}; \qquad \varsigma = \frac{z}{h}.$$

Используя эти координаты, запишем дифференциальные уравнения равновесия при отсутствии объёмных сил:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial \eta}+\frac{a}{h}\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial \varsigma}=0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \eta}+\frac{a}{h}\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial \varsigma}=0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial \eta}+\frac{a}{h}\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \varsigma}=0.$$

Безразмерные координаты позволяют провести сравнительную оценку напряжений. Действительно, если напряжения σ_{xx}, σ_{yy} и σ_{xy}, действующие в плоскостях слоёв, считать соизмеримыми с некоторым значением σ, то согласно приведённым выше уравнениям касательные напряжения σ_{yz} и σ_{zx} будут соизмеримы с $\sigma(h/a)$, а нормальные напряжения σ_{zz} – с $\sigma(h/a)^2$.

Таким образом, чем меньше относительная толщина пластины, тем меньше относительная величина межслоевых напряжений, действующих на площадках между слоями, нормальных к оси z. Применительно к композитным элементам это свойство напряжений находится в полном соответствии с механическими характеристиками материала. Высокая прочность слоистого композита в плоскости слоёв, как правило, сочетается с низкой прочностью связи между слоями, т.е. преимущества волокнистых композитов наиболее полно реализуются в тонкостенных элементах, где напряжения в слоях значительно превышают межслоевые нормальные и касательные напряжения. В элементах, где все компоненты напряжений соизмеримы между собой, волокнистые композиты утрачивают свою эффективность как силовые конструкционные материалы и применяются главным образом благодаря своей коррозионной стойкости, электро- и радиотехническим, а также другим свойствам.

Если исключить из рассмотрения такие элементы, то дальнейший анализ можно в основном ограничить слоистыми конструкциями, толщина стенки которых значительно меньше других размеров. В этом случае координаты x, y, z, очевидно, являются неравноправными. Здесь следует попытаться отделить нормальную координату z и свести трёхмерные исходные уравнения к двухмерным, т.е. к уравнениям, включающим две независимые переменные x и y. Это можно сделать как формально математически, так и путём введения некоторых физических гипотез.

Напомним, что в теории пластин для сведения трёхмерной задачи теории упругости к двухмерной используются различные кинематические гипотезы, касающиеся характера распределения перемещений по толщине пластины. Такой кинематический подход применим и для слоистых конструкций. При этом существуют два направления. В первом, более общем, кинематические гипотезы применяются для каждого отдельного слоя, порядок разрешающих уравнений при этом зависит от числа слоёв. Во втором – вывод уравнений даётся на основе гипотезы, привлекаемой для всего пакета слоёв в целом, порядок уравнений здесь не зависит от числа слоёв.

Дискретно-структурные теории первого направления позволяют с высокой степенью точности описывать как общее напряжённо-деформированное состояние конструкции, так и локальные эффекты в слоях. Для тонких многослойных пластин при слабой неоднородности свойств по толщине эффективнее использовать непрерывно-структурные теории второго направления. В этом случае основные уравнения принципиально не отличаются от соответствующих уравнений теории однородных пластин. В данном разделе ограничимся вторым направлением, т.е. будем использовать единую для всего пакета слоёв гипотезу.

Простейшей и наиболее широко применяемой гипотезой является гипотеза прямых нормалей Кирхгофа, согласно которой любой прямолинейный элемент, нормальный до деформации к срединной плоскости, остаётся прямолинейным, нормальным к деформированной срединной плоскости и сохраняет свою длину. Характерной особенностью данной гипотезы является то, что она не учитывает деформации поперечного сдвига (т.е. $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$). Как показывают многочисленные расчёты конкретных конструкций из современных композитов, поперечную (межслоевую) сдвиговую податливость материала можно не учитывать, если $(h/a) \le 0{,}02$. При большей относительной толщине эти деформации уже заметно сказываются на напряжениях и перемещениях, причём при увеличении h/a их влияние резко возрастает.

Не ограничиваясь в дальнейшем расчётом тонких композитных пластин, относительная толщина которых не превышает 0,02, будем учитывать при построении прикладной теории композитных пластин деформации поперечного сдвига. Строгий учёт сдвиговой податливости материала не позволяет построить достаточно простую прикладную теорию. Впрочем, в таком учёте нет необходимости, поскольку деформация сдвига, как правило, явля-

ется лишь второстепенным эффектом. Для приближённого учёта деформаций γ_{xz} и γ_{yz} необходимо ввести соответствующую гипотезу. Имея в виду, что толщина стенки сравнительно мала, естественным обобщением условия $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ представляется осреднение этих деформаций по толщине, т.е. замена истинных деформаций γ_{xz} и γ_{yz} некоторыми осреднёнными по толщине деформациями поперечного сдвига:

$$\psi_x(x,y) = \frac{1}{h}\int_h \gamma_{zx}(x,y,z)\,dz; \qquad \psi_y(x,y) = \frac{1}{h}\int_h \gamma_{yz}(x,y,z)\,dz.$$

Таким образом, приходим к кинематической модели типа Тимошенко (Рейсснера или Миндлина), основанной на гипотезе о независимом повороте нормали. Согласно этой гипотезе (называемой также гипотезой прямой линии) любой прямолинейный элемент, нормальный до деформации к срединной плоскости, при деформировании не искривляется, но в общем случае не остаётся нормальным к деформированной срединной плоскости.

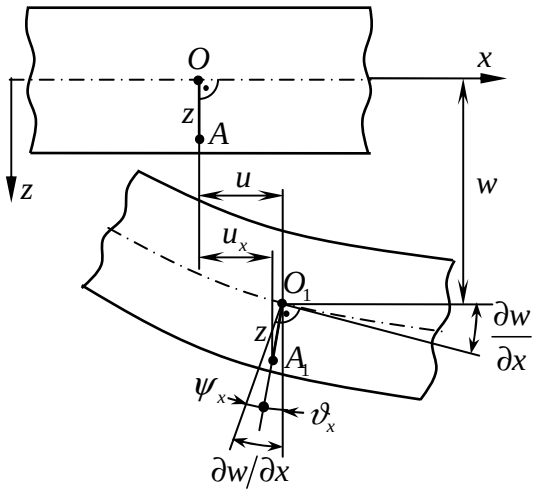


Рисунок 6.4 – Сечение пластины

Рассмотрим сечение пластины плоскостью $y = const$ (рисунок 6.4). В соответствии с этой гипотезой:

$$u_x = u(x,y) + z\,\vartheta_x(x,y);$$
$$u_y = v(x,y) + z\,\vartheta_y(x,y);$$
$$u_z = w(x,y).$$

Здесь u, v, w – перемещения точек отсчётной (обычно срединной) плоскости в направлении осей x, y, z соответственно; ϑ_x, ϑ_y – углы поворота нормали в направлении осей x и y, причём

$$\vartheta_x = \psi_x - \frac{\partial w}{\partial x}; \qquad \vartheta_y = \psi_y - \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Отметим, что при использовании гипотезы прямых нормалей $\psi_x = \psi_y = 0$ и, следовательно,

$$\vartheta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}; \qquad \vartheta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}.$$

6.2.2 Физические соотношения с учётом деформаций поперечного сдвига

Ранее были получены соотношения, связывающие погонные силы и моменты с деформациями отсчётной плоскости и изменениями кривизн пластины:

$$\left[\begin{array}{c} N \\ \hline M \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & D \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} e \\ \hline \chi \end{array}\right], \tag{6.10}$$

где $[A]$ – матрица мембранных жесткостей; $[D]$ – матрица изгибных жесткостей; $[B]$ – матрица мембранно-изгибных жесткостей. Они вычисляются по формулам

$$[A] = \sum_{k=1}^{n} [\kappa^{(k)}](z^{(k)} - z^{(k-1)}) = \sum_{k=1}^{n} [\kappa^{(k)}] h^{(k)};$$

$$[B] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} [\kappa^{(k)}] \left\{ (z^{(k)})^2 - (z^{(k-1)})^2 \right\};$$

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} [\kappa^{(k)}] \left\{ (z^{(k)})^3 - (z^{(k-1)})^3 \right\}.$$

Здесь

$$[\kappa^{(k)}] = [T_1(\theta^{(k)})] [\overline{\kappa}^{(k)}] [T_1(\theta^{(k)})]^{\mathrm{T}}$$

– матрица жёсткости материала k-го слоя в осях (x, y), причём

$$[T_1] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix},$$

где $s = \sin\theta$; $c = \cos\theta$.

В нашем случае к соотношениям (6.10) следует добавить выражения, связывающие перерезывающие силы Q_x и Q_y с осреднёнными по толщине деформациями поперечного сдвига ψ_x и ψ_y:

$$[Q] = [C][\psi], \tag{6.11}$$

где $[Q] = \{Q_x \quad Q_y\}$; $[\psi] = \{\psi_x \quad \psi_y\}$; $[C]$ – матрица сдвиговых жесткостей. Последняя вычисляется аналогично матрице $[A]$:

$$[C] = \sum_{k=1}^{n} [\kappa_\gamma^{(k)}] h^{(k)}.$$

Здесь

$$[\kappa_\gamma^{(k)}] = [T_3(\theta^{(k)})]\,[\bar{\kappa}_\gamma^{(k)}]\,[T_3(\theta^{(k)})]^{\mathrm{T}};$$

$$[\bar{\kappa}_\gamma^{(k)}] = \begin{bmatrix} G_{13}^{(k)} & 0 \\ 0 & G_{23}^{(k)} \end{bmatrix}; \qquad [T_3] = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix},$$

где $G_{13}^{(k)}$ и $G_{23}^{(k)}$ – модули сдвига соответственно в плоскостях (1, 3) и (2, 3) однонаправленного k-го слоя.

6.2.3 Уравнения теории слоистых пластин

Рассмотрим прямоугольную слоистую пластину, находящуюся под действием нормальных q_x, q_y и сдвигающих q_{xy} усилий, приложенных вдоль контура, а также нормального давления p, распределённого по поверхности (рисунок 6.5). Отсчётную плоскость расположим на расстоянии e от верхней. Введём систему координат x, y, z. Добавим к физическим соотношениям (6.10) и (6.11) уравнения равновесия и геометрические соотношения, которые получаются такими же, как и для однородной пластины:

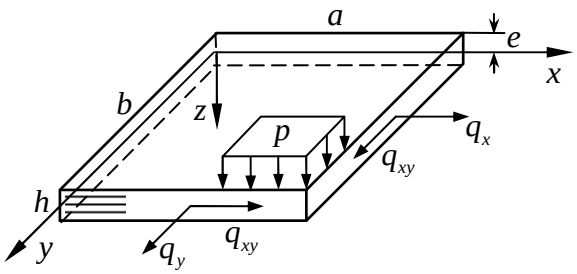


Рисунок 6.5 – Слоистая пластина

$$\left(\sum x = 0; \quad \sum y = 0\right) \qquad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0;$$

$$\left(\sum M = 0\right) \qquad Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; \qquad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}; \qquad (6.12)$$

$$\left(\sum z = 0\right) \qquad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0;$$

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \qquad (6.13)$$

$$\chi_{xx} = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}; \qquad \chi_{yy} = \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y}; \qquad \chi_{xy} = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x};$$

$$\vartheta_x = \psi_x - \frac{\partial w}{\partial x}; \qquad \vartheta_y = \psi_y - \frac{\partial w}{\partial y}. \qquad (6.14)$$

Рассмотрим далее граничные условия. Статические условия предполагают задание на краю $x = const$ усилий и моментов N_x, T, Q_x, M_x, M_{xy}, а на

краю $y = const$ – N_y, T, Q_y, M_y, M_{xy}. Геометрические (или кинематические) условия записываются через перемещения u, v, w отсчётной плоскости ($z = 0$) и углы поворота нормали к ней ϑ_x, ϑ_y. Рассмотрим подробнее условия, предполагающие отсутствие прогиба и смещения вдоль края и свободное смещение поперёк края, т.е.

– при $x = const$:

$$w = 0, \quad v = 0, \quad \vartheta_y = 0, \quad N_x = 0, \quad M_x = 0; \tag{6.15}$$

– при $y = const$:

$$w = 0, \quad u = 0, \quad \vartheta_x = 0, \quad N_y = 0, \quad M_y = 0. \tag{6.16}$$

Условия (6.15) и (6.16) имеют две особенности: во-первых, они допускают представление решения уравнений (6.10)…(6.14) в двойных тригонометрических рядах, каждый член которых удовлетворяет этим условиям, что принципиально упрощает решение, и, во-вторых, они хорошо моделирую распространённые схемы закрепления панелей.

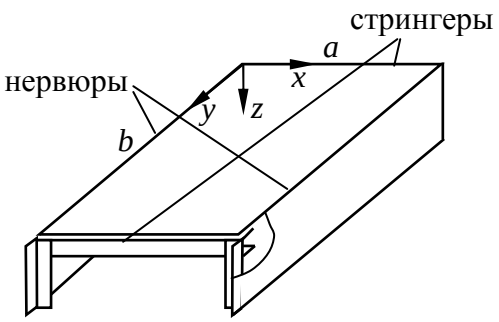


Рисунок 6.6 – Панель обшивки

На рисунке 6.6 показана схема типовой панели обшивки крыла самолёта. Поперечные кромки $x = 0$ и $x = a$ опираются на тонкие стенки (нервюры), жёсткие в своей плоскости (что обеспечивает выполнение условий $w = v = \vartheta_y = 0$) и податливые при нагружении в направлении оси x (т.е. можно принять $N_x = M_x = 0$). Продольные кромки $y = 0$ и $y = b$ опираются на рёбра (стрингеры), обладающие высокой изгибной жёсткостью в плоскости xz и низкой крутильной жёсткостью, что также обеспечивает приближённое выполнение условий (6.16).

Система (6.10)…(6.14) включает в себя 21 уравнение и является полной, т.е. содержит столько же неизвестных. Она может быть приведена к двум группам уравнений, соответствующим задачам о нагружении пластины в своей плоскости и изгибе. Для удобства решения плоской задачи теории упругости введём функцию напряжений Эри $\varphi(x, y)$:

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \qquad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \qquad N_x = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \tag{6.17}$$

В результате тождественных преобразований системы (6.10)…(6.14) получим четыре дифференциальных уравнения:

$$f_1\left(\varphi, \vartheta_x, \vartheta_y\right) = 0 \text{ – плоское напряжённое состояние;} \quad (6.18)$$

$$\left.\begin{aligned} f_2\left(\vartheta_x, \vartheta_y, \varphi\right) &= 0 \\ f_3\left(w, \vartheta_x, \vartheta_y, \varphi\right) &= 0 \\ f_4\left(w, \vartheta_x, \vartheta_y, \varphi\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ – изгиб,} \quad (6.19)$$

включающих в качестве неизвестных функцию напряжений φ, углы поворота нормали ϑ_x, ϑ_y и прогиб w.

Если эти функции найдены, то затем по формулам (6.13) и (6.14) можно найти деформации и кривизны отсчётной плоскости ($z = 0$) и с помощью равенства

$$[\varepsilon] = [e] + z[\chi] \quad (6.20)$$

может быть получено распределение деформаций по толщине пластины.

Далее соотношение

$$[\bar{\varepsilon}] = [T_1]^{\mathrm{T}}[\varepsilon] \quad (6.21)$$

позволяет найти деформации в слоях в местной системе координат, а закон Гука

$$[\bar{\sigma}] = [\bar{\kappa}][\bar{\varepsilon}] \quad (6.22)$$

– определить напряжения, по которым можно судить о прочности отдельных слоёв и пластины в целом.

Ввиду того, что одной из возможных форм разрушения композитных панелей является расслоение от касательных напряжений σ_{xz} и σ_{yz}, получим выражения для их определения. Поперечные касательные напряжения в каждом слое вычисляются обычно путём интегрирования уравнения равновесия трёхмерной теории упругости:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = 0.$$

При этом используются условия неразрывности данных напряжений на границах раздела слоёв и граничные условия на наружных поверхностях пла-

стины. В нашем случае на верхней и нижней поверхностях касательные нагрузки отсутствуют. Таким образом,

$$\sigma_{xz} = -\int\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}\right)dz;$$
$$\sigma_{yz} = -\int\left(\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}\right)dz; \qquad (6.23)$$

условия неразрывности:

$$\sigma_{xz}^{(k)}\left(z^{(k)}\right) = \sigma_{xz}^{(k+1)}\left(z^{(k)}\right); \qquad \sigma_{yz}^{(k)}\left(z^{(k)}\right) = \sigma_{yz}^{(k+1)}\left(z^{(k)}\right) \qquad (k = 1,\ldots,n-1);$$

граничные условия:

$$\sigma_{xz}^{(1)}\left(z^{(0)}\right) = \sigma_{xz}^{(n)}\left(z^{(n)}\right) = 0; \qquad \sigma_{yz}^{(1)}\left(z^{(0)}\right) = \sigma_{yz}^{(n)}\left(z^{(n)}\right) = 0.$$

6.2.4 Частные случаи

Уравнения (6.18) и (6.19) соответствуют общей расчётной модели композитной пластины и учитывают как возможную несимметричность в расположении слоёв, так и деформации поперечного сдвига. На практике необходимость в одновременном учёте этих эффектов возникает довольно редко. Как правило, существенным является лишь один из них, поэтому исходные уравнения можно упростить.

1. Наибольшие упрощения достигаются в том случае, когда структура пакета слоёв симметрична относительно срединной плоскости. При этом если в качестве отсчётной плоскости выбрать срединную, то все компоненты матрицы мембранно-изгибных жесткостей $[B]$ будут равны нулю. Это позволит отделить уравнение (6.18), описывающее плоское напряжённое состояние, от уравнений (6.19), описывающих изгиб.

2. Рассмотрим теперь уравнения, учитывающие несимметричный характер расположения слоёв по толщине и не учитывающие деформации поперечного сдвига. В этом случае $\psi_x = \psi_y = 0$ и, следовательно,

$$\vartheta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}; \qquad \vartheta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Тогда вместо четырёх уравнений (6.18) и (6.19) останутся лишь два:

$$f_1(\varphi, w) = 0; \qquad (6.24)$$

$$f_2(w,\varphi)=0. \qquad (6.25)$$

Здесь уравнение (6.24) описывает плоское напряжённое состояние, а уравнение (6.25) – изгиб. Существенно, что в первое уравнение входит прогиб, а во второе – функция напряжений, т.е. при несимметричном расположении слоёв по толщине нагружение пластины в её плоскости будет сопровождаться изгибом, а поперечное давление будет вызывать появление мембранных усилий. Такое свойство композитной конструкции существенно усложняет её поведение под нагрузкой и увеличивает трудоёмкость расчёта. Более того, можно показать, что при прочих равных условиях композит с симметричным расположением слоёв обладает большей изгибной жёсткостью (мембранная жёсткость от порядка расположения слоёв не зависит).

Итак, при формировании структуры композитной панели слои следует располагать симметрично относительно срединной плоскости. Отметим, что если отсутствуют специальные требования, определяющие порядок расположения слоёв, то структура, как правило, может быть сделана симметричной, так как толщина элементарного композитного слоя весьма мала.

7 ТРЁХСЛОЙНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

7.1 Понятие о трёхслойных конструкциях

Конструкции, работающие на изгиб, могут воспринимать изгибающие моменты, подсчитываемые по формуле (рисунок 7.1):

$$M = \int_F z\sigma dF \ .$$

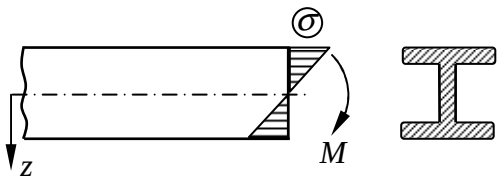


Рисунок 7.1 – Изгиб конструкции

Для того чтобы наряду с уменьшением массы увеличить предельный изгибающий момент, необходимо разнести материал как можно дальше от нейтральной оси. Так появилась широко распространённая форма поперечного сечения – двутавр. Применительно к пластинам и оболочкам эта же идея реализована при создании трёхслойных конструкций.

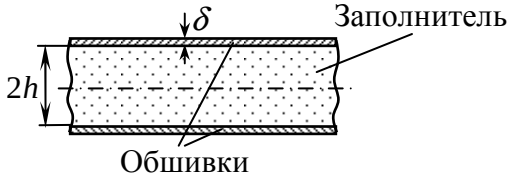


Рисунок 7.2 – Трёхслойная конструкция

Трёхслойная конструкция обычно состоит из двух тонких внешних (несущих) слоёв из высокопрочного материала, связанных между собой слоем относительно маложёсткого и лёгкого заполнителя (рисунок 7.2). Основное назначение заполнителя – обеспечить совместную работу и устойчивость внешних слоёв (обшивок). В качестве заполнителя часто используют различные пенопласты, соты из металлической фольги или полимерной бумаги, гофры, ячейки и др. Для несущих слоёв применяют различные металлические сплавы, а также слоистые композиционные материалы с высокими удельными жесткостными характеристиками. Для обеспечения совместного деформирования обшивки скрепляются со слоем заполнителя, например, с помощью высокопрочных клеев.

Эффективность трёхслойных конструкций можно проиллюстрировать следующими простыми оценками. Момент инерции стенки толщиной 2δ равен $(2\delta)^3/12 = 2\delta^3/3$, а масса единицы поверхности – $2\rho\delta$, где ρ – плотность материала. Если теперь два листа (каждый толщиной δ) расположить на расстоянии $2h$ и соединить заполнителем малой плотности ρ_0, то при $h \gg \delta$ получим момент инерции $2\delta h^2$ и массу $2(\rho\delta + \rho_0 h)$. Отсюда следует, что, например, при $\delta = 0{,}1h$ и $\rho_0 = 0{,}1\rho$ момент инерции возрастает в 300 раз,

а масса всего в два раза. Заметим, что реальный заполнитель обладает сравнительно низкой сдвиговой жёсткостью, что несколько снижает фактический выигрыш в изгибной жёсткости трёхслойной конструкции, однако получаемый результат вполне компенсирует усложнение технологии при замене однородных и подкреплённых панелей трёхслойными. Отмеченные технологические трудности связаны в основном с необходимостью точного обеспечения зазора между несущими слоями. Они характерны для панелей одинарной и двойной кривизны с металлическими обшивками и исчезают при переходе на композитные слои, обладающие в состоянии переработки высокой деформативностью.

Типовой технологический процесс изготовления трёхслойных конструкций с композитными несущими слоями предусматривает намотку или выкладку внутреннего несущего слоя, установку на него заранее подготовленного сотового заполнителя или блоков пенопласта, намотку или выкладку наружного несущего слоя и последующие формование и отверждение композита. Сочетание хорошей технологичности и прочности композитов с высокой изгибной жёсткостью, характерной для трёхслойной панели, определяет широкие перспективы применения трёхслойных элементов с композитными несущими слоями в различных областях техники.

Казалось бы, чем легче заполнитель, тем эффективнее получается конструкция. Однако чрезмерное снижение упругости заполнителя приводит к тому, что он уже не может обеспечить совместную работу обшивок и удержать их от сближения. В связи с этим рассмотрим трёхслойную пластину под действием поперечной нагрузки (рисунок 7.3). В данном случае верхняя обшивка будет сжиматься, а нижняя растягиваться за счёт касательных напряжений, возникающих на поверхности соединения обшивок с заполнителем.

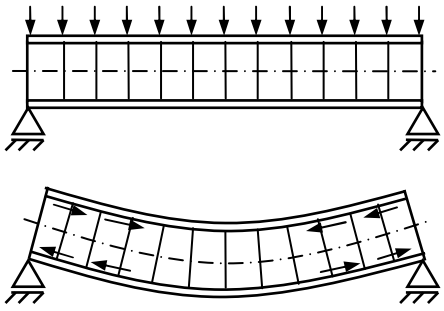


Рисунок 7.3 – Изгиб трёхслойной конструкции

Напомним, что гипотеза прямых нормалей Кирхгофа предполагает модуль поперечного сдвига бесконечно большим. Для лёгкого заполнителя это несправедливо, и поэтому здесь уже нельзя считать, что нормальный элемент остаётся перпендикулярным к деформированной срединной плоскости. Та-

ким образом, главное отличие расчёта трёхслойных пластин от расчёта обычных состоит в учёте деформаций поперечного сдвига заполнителя.

Отметим, что если модуль сдвига заполнителя слишком мал, то несущие слои начинают работать раздельно. Кроме того, здесь может произойти потеря устойчивости и отрыв обшивок (рисунок 7.4). Поэтому, если заполнитель является очень лёгким, то его делают, как правило, армированным.

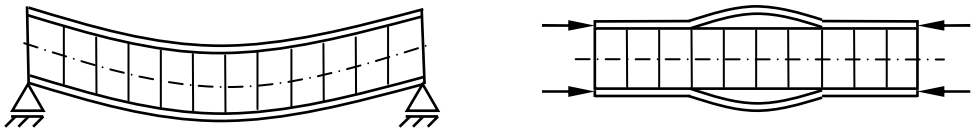


Рисунок 7.4 – Слишком лёгкий заполнитель

В заключение заметим, что полученные ранее уравнения для слоистых пластин могут быть распространены и на трёхслойные конструкции, однако, с некоторыми оговорками. Дело в том, что при их выводе осуществлялось осреднение деформаций по толщине, которое привело к линейному распределению перемещений по нормальной координате. Такое распределение, соответствующее так называемой гипотезе прямой линии, достаточно хорошо отражает реальное деформированное состояние тонкостенных слоистых элементов, если различие в сдвиговой жёсткости отдельных слоёв не слишком велико.

Однако в трёхслойных системах модули сдвига несущих слоёв и заполнителя могут отличаться на несколько порядков, и для них более естественной является гипотеза ломаной линии, приводящая, с одной стороны, к более реалистическому распределению перемещений, а с другой – существенно повышающая порядок системы уравнений.

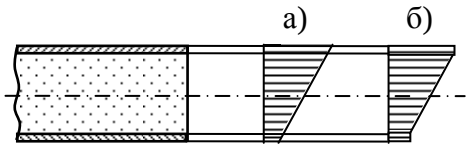


Рисунок 7.5 – Распределение перемещений

Различие между результатами, основанными на гипотезах прямой (а) и ломаной (б) линиях (рисунок 7.5), уменьшается при уменьшении толщины и модуля поперечного сдвига несущих слоёв. Как показывают результаты расчёта, для композитных несущих слоёв, толщина которых, как правило, мала, а модуль сдвига значительно меньше соответствующей характеристики металлических слоёв, использование более простых соотношений, соответствующих гипотезе прямой линии, позволяет получать удовлетворительные результаты.

7.2 Модели деформирования трёхслойных конструкций

Для построения модели деформирования трёхслойной конструкции воспользуемся кинематическим подходом, в основе которого лежат гипотезы о распределении перемещений по толщинам слоёв (рисунок 7.6). Это позволит достаточно простым способом приближённо свести трёхмерную задачу теории упругости к двухмерной.

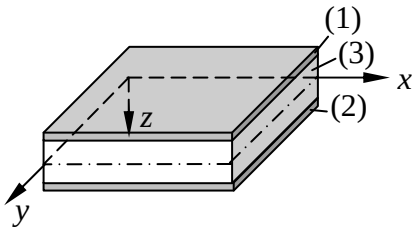


Рисунок 7.6 – Нумерация слоёв

Для пластин и оболочек величина измерения по координате z гораздо меньше двух других измерений. Используя это обстоятельство, перемещения u_x, u_y и u_z можно искать в виде степенных рядов относительно аргумента z:

$$u_x(x,y,z)=\sum_{k=0}^{m} a_k(x,y)z^k;$$

$$u_y(x,y,z)=\sum_{k=0}^{m} b_k(x,y)z^k; \qquad (7.1)$$

$$u_z(x,y,z)=\sum_{k=0}^{n} c_k(x,y)z^k,$$

где $m+1$, $n+1$ – число удерживаемых членов разложения; a_k, b_k, c_k – коэффициенты разложения, представляющие функции аргументов x и y.

Для получения результатов достаточной степени точности при решении задач теории пластин и оболочек ограничиваются, как правило, удержанием небольшого числа первых членов разложения. Приведём несколько примеров. Так, при удержании только по одному члену разложения (7.1), т.е. в предположении, что касательные (тангенциальные) и нормальное перемещения постоянны по толщине, получим уравнения безмоментной теории оболочек. Если удержать в (7.1) для касательных перемещений u_x, u_y два члена разложения, а для нормального перемещения u_z ограничиться первым членом, то получим уравнения теории пластин и оболочек, соответствующие гипотезе Тимошенко. При дополнительном условии об отсутствии деформаций поперечного сдвига получим классическую гипотезу прямых нормалей Кирхгофа (или для оболочек Кирхгофа-Лява).

В приведённых примерах эффекты, связанные с деформациями поперечного (трансверсального) сжатия-растяжения, оказались вне рассмотрения,

поскольку для нормального перемещения удерживался только первый член разложения. Однако при построении моделей более высокого порядка эти эффекты можно легко учесть.

Перейдём к рассмотрению моделей деформирования элемента трёхслойной конструкции. Толщина слоёв обшивок здесь обычно значительно меньше толщины слоя заполнителя, поэтому для описания кинематики деформирования обшивок можно ограничиться мембранной схемой или гипотезой Кирхгофа-Лява.

Рассмотрим три модели слоя заполнителя (рисунок 7.7).

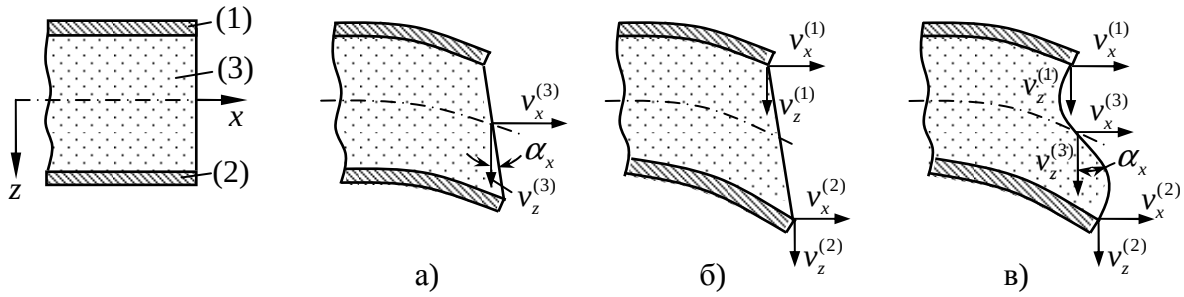


Рисунок 7.7 – Модели деформирования заполнителя

Первая модель (а) предполагает линейное распределение по толщине заполнителя касательных перемещений и несжимаемость материала в поперечном направлении, т.е.

$$u_x = a_0 + a_1 z; \qquad u_y = b_0 + b_1 z; \qquad u_z = c_0 .$$

Для моментных несущих слоёв эта модель соответствует гипотезе ломаной линии для трёхслойного пакета. С помощью такой модели в слое заполнителя приближённо учитываются основные деформации – деформации поперечного сдвига. Подавляющее большинство результатов расчёта трёхслойных конструкций получено с использованием именно этой модели.

Вторая модель (б) в первом приближении учитывает в заполнителе кроме деформаций поперечного сдвига ещё и деформацию поперечного сжатия-растяжения (обжатие нормали). Для этого в аппроксимации (7.1) для всех перемещений удерживаются по два первых члена разложения:

$$u_x = a_0 + a_1 z; \qquad u_y = b_0 + b_1 z; \qquad u_z = c_0 + c_1 z .$$

Такая модель соответствует линейным законам распределения перемещений по толщине слоя заполнителя.

Дальнейшее уточнение деформаций поперечного сдвига и сжатия-растяжения слоя заполнителя возможно при большем числе членов разложения для касательных и нормального перемещений. В связи с этим рассмотрим третью модель (в). Касательные перемещения распределяются в данном случае по кубической параболе аргумента z, а нормальное перемещение (прогиб) – по квадратичной параболе:

$$u_x = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3; \qquad u_y = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3; \qquad u_z = c_0 + c_1 z + c_2 z^2.$$

Отметим, что для выбранных моделей деформирования аппроксимацию перемещений удобно представлять не через неопределённые коэффициенты разложения a_k, b_k, c_k, а через перемещения и углы поворота некоторых характерных поверхностей $v_x^{(i)}, v_y^{(i)}, v_z^{(i)}, \alpha_x, \alpha_y$ (см. рисунок 7.7). В этом случае подлежащие определению функции аргументов x, y будут иметь наглядное геометрическое представление, а также более удобно будут записываться и граничные условия задачи.

7.3 Энергетические оценки

Определим комплекс геометрических и упругих характеристик трёхслойной конструкции, в соответствии с которыми в заполнителе будут преобладать те или иные деформации. Такие предварительные оценки, пусть даже грубые, полезны, поскольку они помогают выбрать соответствующую модель деформирования и приближённо оценить трудоёмкость предстоящего расчёта.

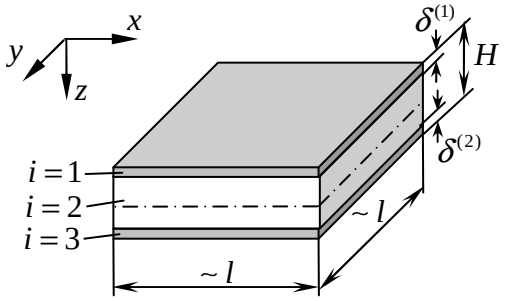


Рисунок 7.8 – Трёхслойная пластина

Рассмотрим трёхслойную пластину, подвергающуюся изгибу (рисунок 7.8). Воспользуемся энергетическими оценками. Представим удельную энергию деформации слоя заполнителя в следующем виде:

$$W^{(3)} = W_1^{(3)} + W_2^{(3)} + W_3^{(3)},$$

где

$$W_1^{(3)} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}^{(3)}\varepsilon_{xx}^{(3)} + \sigma_{yy}^{(3)}\varepsilon_{yy}^{(3)} + \sigma_{xy}^{(3)}\gamma_{xy}^{(3)}\right)$$

– удельная энергия деформаций заполнителя в плоскости пластины;

$$W_2^{(3)} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xz}^{(3)}\,\gamma_{xz}^{(3)} + \sigma_{yz}^{(3)}\,\gamma_{yz}^{(3)}\right)$$

– удельная энергия деформаций поперечного сдвига;

$$W_3^{(3)} = \frac{1}{2}\sigma_{zz}^{(3)}\,\varepsilon_{zz}^{(3)}$$

– удельная энергия деформации поперечного сжатия-растяжения.

Для получения энергетических оценок требуется провести сравнение слагаемых $W_1^{(3)}$, $W_2^{(3)}$ и $W_3^{(3)}$. Рассмотрим упругие характеристики материалов. Для обшивок примем, что их модули упругости имеют порядок E:

$$E_x^{(i)} \sim E_y^{(i)} \sim G_{xy}^{(i)} \sim E \qquad (i = 1,2).$$

Величину E будем называть характерным модулем. Для слоя заполнителя соотнесём его модули упругости с характерным модулем E:

$$\begin{gathered} E_x^{(3)} \sim E_y^{(3)} \sim G_{xy}^{(3)} \sim \varphi_1 E; \\ G_{xz}^{(3)} \sim G_{yz}^{(3)} \sim \varphi_2 E; \\ E_z^{(3)} \sim \varphi_3 E. \end{gathered} \tag{7.2}$$

С помощью чисел $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ устанавливаются порядки отношений модулей заполнителя к характерному модулю.

Будем считать, что напряжённо-деформированное состояние обшивок описывается гипотезой Кирхгофа-Лява. Порядок основных напряжений положим равным σ:

$$\sigma_{xx}^{(i)} \sim \sigma_{yy}^{(i)} \sim \sigma_{xy}^{(i)} \sim \sigma \qquad (i = 1,2),$$

а порядок основных деформаций определим, используя соотношения упругости:

$$\varepsilon_{xx}^{(i)} \sim \varepsilon_{yy}^{(i)} \sim \gamma_{xy}^{(i)} \sim \frac{\sigma}{E} = \varepsilon \qquad (i = 1,2). \tag{7.3}$$

Порядки напряжений поперечного сдвига и сжатия-растяжения в обшивках можно приближённо установить, воспользовавшись уравнениями равновесия

$$\begin{gathered} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}^{(i)}}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}^{(i)}}{\partial z} = 0; \end{gathered} \tag{7.4}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yz}^{(i)}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}^{(i)}}{\partial z}=0.$$

Если принять, что изменяемость напряжённого состояния вдоль осей x, y и z характеризуется масштабными коэффициентами l и h (см. рисунок 7.8), т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x}\sim\frac{\partial}{\partial y}\sim\frac{1}{l};\qquad \frac{\partial}{\partial z}\sim\frac{1}{h},$$

где $\delta^{(i)}\le h\le H$, то согласно (7.4) можно получить следующие оценки:

$$\sigma_{xx}^{(i)}\sim\sigma_{yy}^{(i)}\sim\sigma_{xy}^{(i)}\sim\eta\sigma;\qquad \sigma_{zz}^{(i)}\sim\eta^2\sigma\qquad (i=1,2),$$

где $\eta=h/l$.

Для анализа напряжённо-деформированного состояния заполнителя рассмотрим характерные эпюры распределения напряжений по толщине трёхслойного пакета (рисунок 7.9).

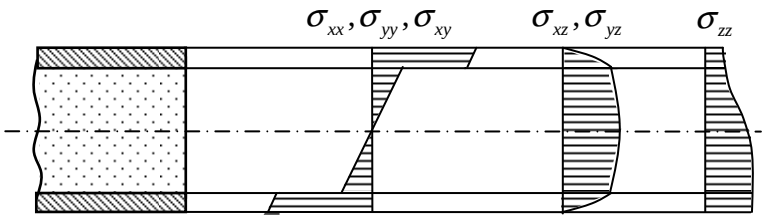


Рисунок 7.9 – Эпюры напряжений

Поскольку напряжения поперечного сдвига и сжатия-растяжения при переходе от слоя к слою не терпят разрывов, то

$$\begin{aligned}&\sigma_{xz}^{(3)}\sim\sigma_{yz}^{(3)}\sim\sigma_{xz}^{(i)}\sim\sigma_{yz}^{(i)}\sim\eta\sigma=\eta E\varepsilon;\\&\sigma_{zz}^{(3)}\sim\sigma_{zz}^{(i)}\sim\eta^2\sigma=\eta^2E\varepsilon\qquad (i=1,2).\end{aligned}\tag{7.5}$$

Порядки соответствующих деформаций с учётом (7.2) будут равны

$$\gamma_{xz}^{(3)}\sim\gamma_{yz}^{(3)}\sim\frac{\eta\varepsilon}{\varphi_2};\qquad \varepsilon_{zz}^{(3)}\sim\frac{\eta^2\varepsilon}{\varphi_3},\tag{7.6}$$

где ε – порядок основных деформаций (7.3).

Так как деформации в плоскости пластины при переходе от слоя к слою не терпят разрывов, то

$$\varepsilon_{xx}^{(3)}\sim\varepsilon_{yy}^{(3)}\sim\gamma_{xy}^{(3)}\sim\varepsilon,\tag{7.7}$$

а соответствующие напряжения заполнителя определяются с использованием упругих характеристик (7.2):

$$\sigma_{xx}^{(3)} \sim \sigma_{yy}^{(3)} \sim \sigma_{xy}^{(3)} \sim \varphi_1 E\varepsilon\,, \tag{7.8}$$

Принимая во внимание полученные оценки для напряжений и деформаций в слое заполнителя (7.5)…(7.8), удельную энергию деформации заполнителя можно представить в виде

$$W^{(3)} = W_1^{(3)} + W_2^{(3)} + W_3^{(3)} \sim E\varepsilon^2\left(\varphi_1 + \frac{\eta^2}{\varphi_2} + \frac{\eta^4}{\varphi_3}\right). \tag{7.9}$$

В зависимости от соотношения параметров φ_1, η^2/φ_2, η^4/φ_3 проведём классификацию заполнителей следующим образом.

1. Если для трёхслойной конструкции

$$\varphi_1 \gg \eta^2/\varphi_2; \qquad \varphi_1 \gg \eta^4/\varphi_3\,, \tag{7.10}$$

то

$$W^{(3)} = W_1^{(3)} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}^{(3)}\,\varepsilon_{xx}^{(3)} + \sigma_{yy}^{(3)}\,\varepsilon_{yy}^{(3)} + \sigma_{xy}^{(3)}\,\gamma_{xy}^{(3)}\right).$$

Такой слой заполнителя ничём не будет отличаться от слоя, деформирование которого описывается с использованием гипотезы Кирхгофа-Лява.

2. Если

$$\varphi_1 \sim \eta^2/\varphi_2; \qquad \varphi_1 \gg \eta^4/\varphi_3\,, \tag{7.11}$$

то

$$W^{(3)} = W_1^{(3)} + W_2^{(3)} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}^{(3)}\,\varepsilon_{xx}^{(3)} + \sigma_{yy}^{(3)}\,\varepsilon_{yy}^{(3)} + \sigma_{xy}^{(3)}\,\gamma_{xy}^{(3)} + \sigma_{xz}^{(3)}\,\gamma_{xz}^{(3)} + \sigma_{yz}^{(3)}\,\gamma_{yz}^{(3)}\right).$$

В этом случае в заполнителе следует учитывать как напряжения, параллельные срединной плоскости, так и напряжений поперечного сдвига. Такой заполнитель называют «жёстким».

3. Если параметры таковы, что

$$\eta^2/\varphi_2 \gg \varphi_1; \qquad \eta^2/\varphi_2 \gg \eta^4/\varphi_3\,, \tag{7.12}$$

то

$$W^{(3)} = W_2^{(3)} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xz}^{(3)}\,\gamma_{xz}^{(3)} + \sigma_{yz}^{(3)}\,\gamma_{yz}^{(3)}\right)$$

и в заполнителе учитывают лишь напряжения поперечного сдвига. Такой заполнитель называют «лёгким» или «мягким».

4. В случае, если

$$\eta^2/\varphi_2 \sim \eta^4/\varphi_3 \gg \varphi_1, \tag{7.13}$$

то

$$W^{(3)} = W_2^{(3)} + W_3^{(3)} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xz}^{(3)}\,\gamma_{xz}^{(3)} + \sigma_{yz}^{(3)}\,\gamma_{yz}^{(3)} + \sigma_{zz}^{(3)}\,\varepsilon_{zz}^{(3)}\right)$$

и заполнитель называют «трансверсально-мягким». Для таких заполнителей, как видно из (7.13), при $\varphi_2 \sim \varphi_3$ должно выполняться условие $l \sim h$. В этом случае под l понимается масштаб изменения напряжённо-деформированного состояния, которое имеет локальный характер. Такое деформирование возникает, например, в окрестности точек приложения сосредоточенных сил, закреплений, а также при коротковолновых изгибных колебаниях и местных формах потери устойчивости.

8 КОНЦЕНТРАТОРЫ И ДЕФЕКТЫ В КОМПОЗИТАХ

8.1 Кромочные эффекты

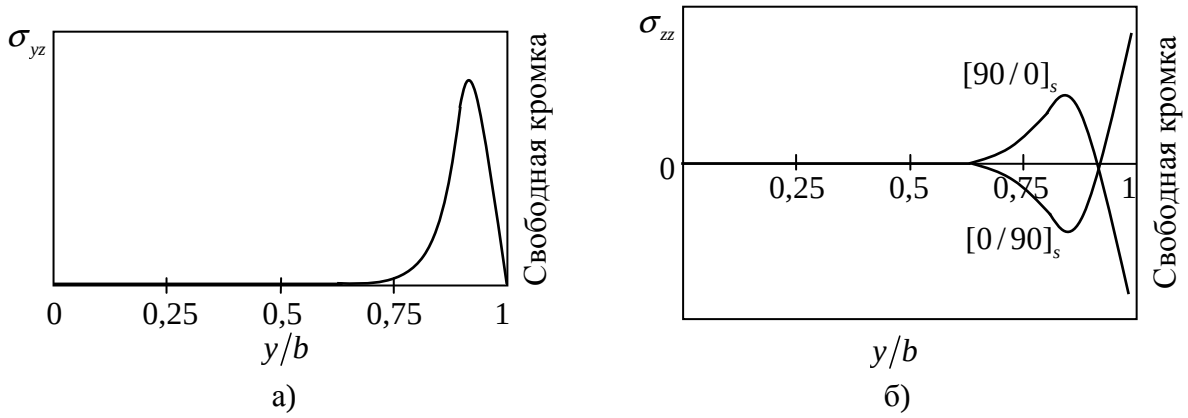
Ранее отмечалось, что высокая прочность слоистого композита в плоскости слоёв, как правило, сочетается с низкой прочностью связи между слоями. Однако для тонкостенных композитов межслоевые напряжения обычно малы.

Кромочный эффект в изделиях из композитов состоит в существенном увеличении межслоевых напряжений вблизи свободных от нагрузки кромок. Отметим, что величина возникающих при этом межслоевых

При этом установлено, что при заданной геометрии слоёв напряжения σ_{xz} являются функцией σ_{xy}, а напряжения σ_{yz} – функцией σ_{yy}, причём межслоевые нормальные напряжения σ_{zz} связаны с σ_{yz} уравнением

$$\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0,$$

из которого они могут быть определены.



а) б)

Рисунок 8.4 – Распределение межслоевых напряжений для ортогонально армированных композитов

Отметим, что для точного вычисления межслоевых напряжений требуется решение трёхмерной задачи теории упругости. Наиболее подходящим для этого инструментом является метод конечных элементов.

Из вышесказанного следует, что межслоевые напряжения, возникающие вблизи свободных кромок, могут вызвать расслоение композитной конструкции. Поэтому если возможно, следует предусматривать на свободных кромках различные меры, снижающие склонность к расслоению (например, подкрепляющие элементы). В противном случае, изменяя последовательность укладки слоёв можно свести к минимуму межслоевые напряжения. Особенно необходимым является уменьшение величины растягивающих нормальных межслоевых напряжений. Величина этих напряжений определяется не только последовательностью укладки слоёв, но и видом нагружения.

8.2 Влияние дефектов типа расслоения

8.2.1 Вводные замечания

В процессе производства и при эксплуатации тонкостенных конструкций из композиционных материалов в них возникают дефекты самых раз-

личных видов. В слоистых пластинах и оболочках наиболее часто встречаются дефекты, при которых нарушается связь между слоями. Нарушение межслойной монолитности приводит к снижению прочности и жёсткости конструкции. Поэтому исследование различных проблем механики многослойных конструкций с дефектами типа расслоения прежде всего диктуется необходимостью установления степени их пригодности для дальнейшего использования. В связи с этим следует отметить, что в настоящее время разработаны надёжные экспериментальные методы, позволяющие определять размеры дефектов данного типа.

Здесь необходимо различать малые зоны расслоения, когда характерный размер дефекта сравним с толщиной отслаиваемого слоя; средние зоны расслоения, верхняя граница площади которых определяется потерей местной устойчивости отслоения; большие зоны расслоения, размеры которых соизмеримы с характерными размерами конструкции. В дальнейшем будем рассматривать лишь средние и большие зоны расслоения, поскольку влияние малых зон на несущую способность конструкции, очевидно, незначительно.

При моделировании расслоений часто используется схема, по которой зона повреждения рассматривается как область с ослабленной по сравнению с монолитной конструкцией изгибной жёсткостью. Однако такая модель совершенно не описывает локальные явления в зоне расслоения, не позволяет исследовать выпучивание отслоенного участка, которое приводит, как правило, к росту дефекта. В связи с этим для анализа устойчивости отслоения при действии сжимающих нагрузок иногда применяется локальный подход, когда рассматривается лишь наиболее тонкий слой в зоне дефекта. Здесь игнорируется истинное напряжённо-деформированное состояние (НДС) на границе расслоения, так как теряющий устойчивость слой считается защемлённым. Кроме того, данный подход не учитывает смешанные формы потери устойчивости. Более общим является подход, в котором исследуется не только отслоенный участок, но и вся конструкция в целом. В этом случае необходимо решать контактную задачу о взаимодействии между слоями в зоне дефекта.

Для анализа роста расслоений в процессе эксплуатации повреждённой конструкции обычно пользуются методами линейной механики разрушения. Наиболее часто здесь применяется энергетический критерий Гриффитса, обобщённый В.В. Болотиным на многопараметрические задачи. Он основан на сравнении энергии, необходимой для создания новой поверхности трещи-

ны, и энергии, освобождающейся при увеличении дефекта. Для определения интенсивности освобождения энергии, как правило, используется метод закрытия трещины или метод податливости. Характеристики межслойной трещиностойкости определяются из эксперимента на простейших образцах.

В заключение отметим, что среди многослойных конструкций трёхслойные с лёгким заполнителем наиболее чувствительны к расслоению. Поэтому при проектировании трёхслойных пластин и оболочек необходимо учитывать возможность возникновения этих дефектов как в процессе их изготовления, так и под действием эксплуатационных нагрузок. Здесь важно не только уметь определять НДС повреждённой конструкции, но и оценивать склонность расслоения к росту.

8.2.2 Моделирование расслоений в трёхслойных конструкциях

Рассмотрим трёхслойную пластину (или оболочку) с дефектом в виде участка, где нарушена связь между одним из внешних слоёв и заполнителем. Предположим, что в зоне расслоения отслоенная обшивка при изгибе скользит по заполнителю. Силы трения, препятствующие этому скольжению, значительно меньше напряжений сдвига заполнителя в бездефектных зонах, поэтому их обычно не учитывают.

В трёхслойных конструкциях лёгкий заполнитель работает в основном на поперечный сдвиг, обеспечивая совместное деформирование обшивок. В зоне расслоения касательные усилия с одного слоя на другой передаваться не могут, и, следовательно, заполнитель выключается из работы, сбрасывая с себя внутренние усилия на несущие слои. Это приводит к существенному понижению изгибной жёсткости конструкции в области дефекта. Она будет определяться только собственными жесткостями обшивок. Отметим, что здесь необходимо учитывать моментность внешних слоёв. В общем случае для расслоенного пакета нельзя также пренебрегать изгибной жёсткостью заполнителя, которая за счёт большей толщины заполнителя может быть сравнима с жёсткостью обшивки.

Описанную выше схему с ослабленной изгибной жёсткостью можно реализовать на базе модели трёхслойной конструкции, учитывающей работу обшивок на изгиб. В этом случае в зоне дефекта сдвиговую жёсткость заполнителя следует принять равной нулю, а изгибную – добавить к жёсткости скреплённого с ним несущего слоя. Заполнитель здесь, как правило, полагается не сжимаемым в поперечном направлении. Поэтому такой подход применим, если нет выпучивания отслоившейся обшивки.

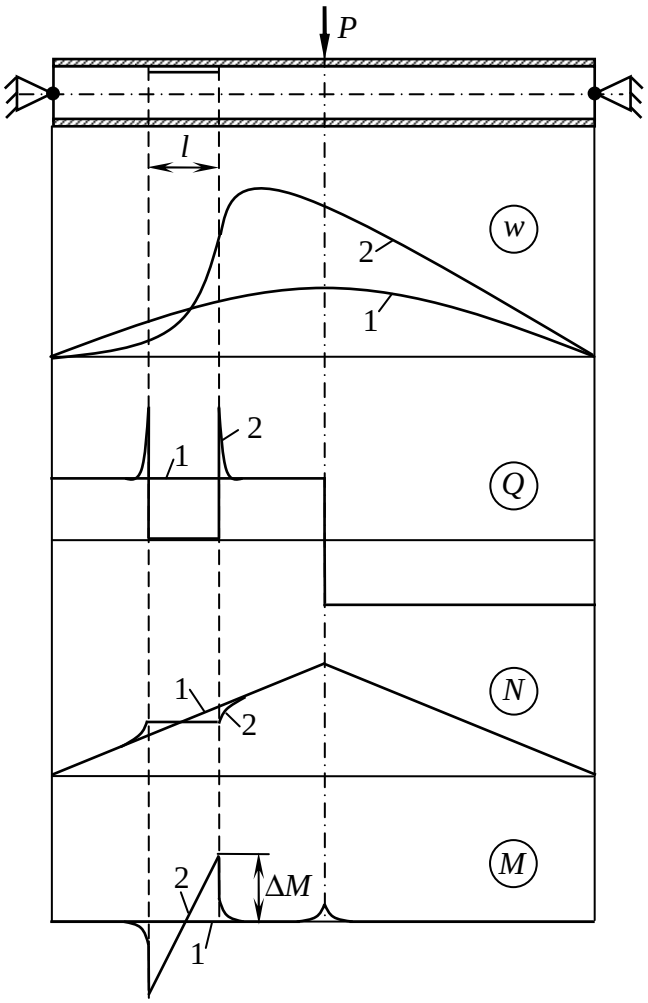


Рисунок 8.5 – Влияние расслоения на НДС трёхслойной пластины

На рисунке 8.5 представлены результаты расчёта цилиндрического изгиба трёхслойной пластины, полученные с использованием описанной выше модели.

Здесь 1 – бездефектная конструкция; 2 – пластина с расслоением длиной l; w – прогиб пластины; Q – перерезывающая сила в заполнителе; N – нормальное усилие в обшивке; M – изгибающий момент в одной из обшивок.

Видно, что параметры НДС пластины при наличии расслоения существенно отличаются от параметров бездефектной конструкции. Наблюдается значительное увеличение максимального прогиба и смещение его в сторону дефекта. Касательные напряжения в заполнителе резко возрастают на границах зоны расслоения со стороны бездефектных участков и равны нулю в расслоенной области. Поэтому в зоне дефекта нормальные усилия остаются практически постоянными, а на границах зоны имеет место сильный изгиб несущих слоёв.

Проведенные экспериментальные исследования показывают, что процесс разрушения конструкций с расслоениями может состоять из двух фаз. В первой фазе один из слоёв в зоне дефекта теряет устойчивость, во второй – начинается рост расслоения, инициированный локальным выпучиванием слоя. В связи с этим необходима модель, которая позволяла бы исследовать местную устойчивость отслоившейся обшивки.

Рассмотрим модель трёхслойной конструкции, учитывающую обжатие заполнителя. В зоне дефекта сдвиговую жёсткость заполнителя также положим равной нулю, а для задания его трансверсальной жёсткости здесь требуется контактная постановка задачи. В области дефекта необходимо сформулировать условие одностороннего контакта заполнителя с отслоенной об-

шивкой, которое зависит от знака деформации обжатия заполнителя ε_{zz}. Если в процессе деформирования для этой величины выполняется условие $\varepsilon_{zz} < 0$, что соответствует контактному давлению сжатия, то трансверсальная жёсткость заполнителя полагается равной $\overline{E}_z$. В противном случае ($\varepsilon_{zz} \geq 0$) данная величина принимается равной нулю.

Отметим, что такая модель также не учитывает касательные силы трения в зоне расслоения. Это допущение направлено на повышение запаса прочности. Для учёта трения требуется корректная формулировка закона трения при выполнении условия $\varepsilon_{zz} < 0$.

8.2.3 Анализ роста расслоений

Расслоение вызывает большие межслоевые напряжения вдоль границы дефекта, что часто приводит к прогрессирующему увеличению начальной зоны расслоения. Следовательно, необходимо учитывать эволюцию таких зон в процессе деформирования конструкции.

Межслоевые напряжения на границах расслоения имеют сингулярную природу. В условиях нормального отрыва или сдвига дефекты данного типа ведут себя примерно так же, как и трещины. Поэтому для задач расслоения обычно используют методы линейной механики разрушения без значительных изменений. Для характеристики НДС вблизи сингулярности можно воспользоваться конечным параметром механики разрушения – интенсивностью освобождения энергии G. При достижении G его критического значения G_c, определяемого из экспериментов на простейших образцах, будет иметь рост дефекта.

Для нахождения интенсивности освобождения энергии часто используют метод закрытия трещины, согласно которому значение G равно работе необходимой для закрытия единицы поверхности трещины. Эта работа вычисляется как половина произведения поверхностных сил, действующих на берегах трещины и необходимых для её закрытия, на соответствующие перемещения (рисунок 8.6):

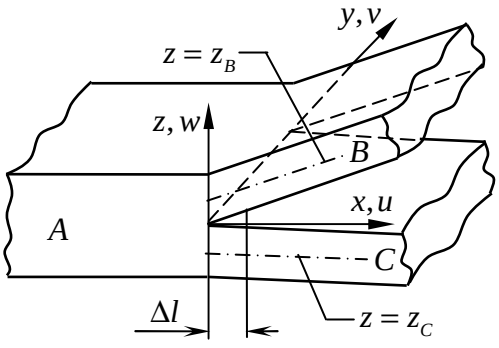


Рисунок 8.6 – К методу закрытия трещины

$$G = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_0^{\Delta l} \left\{ \sigma_{zz}(x - \Delta l) w(x) + \sigma_{xz}(x - \Delta l) u(x) + \sigma_{yz}(x - \Delta l) v(x) \right\} dx, \quad (8.1)$$

где Δl – размер закрытия трещины; u, v, w – перемещения в направлении осей x, y, z; σ_{zz}, σ_{xz}, σ_{yz} – напряжения необходимые для закрытия трещины.

Гипотезы, используемые в теории пластин и оболочек при сведении трёхмерной задачи теории упругости к двухмерной, не позволяют непосредственно применять выражение (8.1) для анализа роста расслоений. Обратив внимание на то, что дефекты данного типа часто приводят к резкому изменению в поведении конструкции при переходе от неповреждённой области к расслоенной, можно предложить модифицированный метод закрытия трещины. Согласно этому методу интенсивность освобождения энергии равняется работе, необходимой для преобразования деформаций расслоенной области в деформации неповреждённой. Учитывая, что размер закрытия Δl является бесконечно малым, распределение деформаций по толщине слоёв после закрытия расслоения можно считать таким же, как и в неповреждённой области вблизи фронта дефекта.

Распределения деформаций по толщине пластины в областях A, B и C представляются в следующем виде (см. рисунок 8.6):

$$[\varepsilon_A] = [e_A] + z[\chi_A]; \quad [\varepsilon_B] = [e_B] + (z - z_B)[\chi_B]; \quad [\varepsilon_C] = [e_C] + (z - z_C)[\chi_C], \quad (8.2)$$

где $[e]$ и $[\chi]$ – матрицы-столбцы деформаций и изменений кривизн отсчётной плоскости соответствующего слоя.

Для преобразования деформаций слоёв B и C в деформации области A требуются следующие приращения:

$$\begin{aligned} [\Delta\varepsilon_B] &= [\varepsilon_A] - [\varepsilon_B] = ([e_A] - [e_B] + z_B[\chi_A]) + (z - z_B)([\chi_A] - [\chi_B]) = \\ &= [\Delta e_B] + z'_B[\Delta\chi_B]; \\ [\Delta\varepsilon_C] &= [\varepsilon_A] - [\varepsilon_C] = ([e_A] - [e_C] + z_C[\chi_A]) + (z - z_C)([\chi_A] - [\chi_C]) = \\ &= [\Delta e_C] + z'_C[\Delta\chi_C], \end{aligned} \quad (8.3)$$

где

$$z'_B = z - z_B; \qquad z'_C = z - z_C.$$

Чтобы получить требуемые деформации $[\Delta e]$ и $[\Delta\chi]$, необходимы усилия и моменты:

$$\left[\begin{array}{c}\Delta N\\ \hline \Delta M\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}A & B\\ \hline B & D\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c}\Delta e\\ \hline \Delta\chi\end{array}\right], \tag{8.4}$$

где $[A]$ – матрица мембранных жесткостей; $[D]$ – матрица изгибных жесткостей; $[B]$ – матрица мембранно-изгибных жесткостей.

Окончательное выражение для интенсивности освобождения энергии записывается как

$$G=\frac{1}{2}\left([\Delta N_B]^{\mathrm{T}}[\Delta e_B]+[\Delta M_B]^{\mathrm{T}}[\Delta\chi_B]+[\Delta N_C]^{\mathrm{T}}[\Delta e_C]+[\Delta M_C]^{\mathrm{T}}[\Delta\chi_C]\right). \tag{8.5}$$

Недостатком рассмотренного метода является то, что в общем случае достаточно трудно определить распределение деформаций вблизи фронта дефекта. Поэтому данный подход используется в основном для тонких отслоений, когда базовый слой можно считать абсолютно жёстким.

Как отмечалось ранее, среди многослойных конструкций трёхслойные с лёгким заполнителем наиболее чувствительны к расслоению. На границах расслоений у них имеет место сильный изгиб обшивок, что приводит к резкому изменению в поведении конструкции при переходе от бездефектной области к расслоенной. Поэтому при использовании модифицированного метода закрытия трещины интенсивность освобождения энергии здесь можно определять по величине изгиба обшивок расслоенной зоны вблизи фронта дефекта. При этом изгибом несущих слоёв в неповреждённой области можно пренебречь.

Для рассмотренной ранее задачи о цилиндрическом изгибе трёхслойной пластины с расслоением имеем

$$G=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\Delta M_i\,\Delta\chi_i=\frac{(\Delta M)^2}{D}, \tag{8.6}$$

где ΔM – приращение изгибающего момента обшивки (см. рисунок 8.5); D – изгибная жёсткость обшивки.

В заключение следует отметить, что с помощью модифицированного метода закрытия трещины находится полная интенсивность освобождения энергии:

$$G=G_{\mathrm{I}}+G_{\mathrm{II}}+G_{\mathrm{III}}, \tag{8.7}$$

где $G_{\mathrm{I}}, G_{\mathrm{II}}, G_{\mathrm{III}}$ – компоненты для форм отрыва, поперечного и продольного сдвигов соответственно.

Характеристики трещиностойкости $G_{Ic}, G_{IIc}, G_{IIIc}$ для различных типов нагружения определяются из экспериментов на простейших образцах. При этом в качестве критического значения полной интенсивности в запас прочности здесь можно принять

$$G_c = \min\left(G_{Ic}, G_{IIc}, G_{IIIc}\right). \tag{8.8}$$

9 ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

9.1 Основные этапы технологического процесса

Производство изделий из композитов с полимерной матрицей основано на способности связующего находиться при нагревании в пластическом состоянии, заполнять под давлением полость формы и переходить при дальнейшем нагреве из расплавленного состояния в твёрдое, неплавкое.

Технологические процессы получения деталей и узлов из композиционных материалов заключаются в придании исходному материалу заданной формы с помощью формующей оснастки. Существенной особенностью таких процессов является совмещение этапов создания материала и формообразования элемента конструкции.

Технологические процессы изготовления деталей или агрегатов летательных аппаратов из композитов включают следующие основные операции:

1) подготовку исходных компонентов композита;

2) совмещение армирующих элементов и связующего;

3) формообразование элемента конструкции;

4) отверждение полимерной матрицы;

5) доработку и соединение с другими конструктивными элементами (сборку).

Подготовка исходных компонентов композита. Эта операция заключается в проверке свойств армирующих материалов (нитей, ткани) и связующего на соответствие техническим требованиям.

Совмещение армирующих элементов и связующего. Методы изготовления элементов конструкций из композитов на полимерной матрице можно разделить на прямые (или однооперационные) и непрямые (или многооперационные). К первым относятся методы изготовления элементов непосредственно из исходных компонентов композиции, минуя операцию изготовления из них полуфабрикатов. К таким методам следует отнести «мокрую» намотку, пултрузию и некоторые другие методы. Хотя в этих методах процессы формования материала и формообразования конструкционного элемента совмещены, они являются и более сложными. Эта сложность связана с необходимостью осуществлять и контролировать большое число разнородных тех-

нологических операций, что нередко приводит к снижению физико-механических и других свойств композита.

Непрямыми методами называются такие, в которых элементы конструкций образуются из полуфабрикатов. В этом случае пропитка армирующих материалов представляет собой самостоятельную операцию, в результате которой из армирующих элементов и связующего получают препреги – нити, жгуты, ленты и ткани, пропитанные связующим, которое подсушивается и частично отверждается. Преимущество таких методов состоит в том, что производство летательных аппаратов отделяется от несвойственных ему химико-технологических процессов, а изготовление полуфабрикатов осуществляется специализированным производством.

Формообразование элемента конструкции. В производстве летательных аппаратов наиболее широкое применение находят прессовый, вакуумный, автоклавный методы, а также метод намотки.

В общем случае процесс формообразования детали состоит в получении заготовки, придании ей формы и размеров детали и отверждении полимерного связующего. Эти операции в зависимости от метода изготовления могут осуществляться последовательно или параллельно. Заготовки деталей обычно создаются выкладкой в форму или намоткой на оправку нитей, ровингов, жгутов, лент, тканей и т.п.

Выкладку чаще всего применяют при изготовлении пространственных элементов сложной конфигурации. Намотку широко используют для изготовления изделий, имеющих форму тел вращения, а также изделий коробчатого и более сложного поперечного сечения.

Этап непосредственного формования характеризуется созданием давления на заготовку, а метод его осуществления определяет название всего способа формообразования (прессовый, вакуумный, автоклавный и т.д.). Изделия небольших и средних размеров, а также плоские листы (обшивки) получают прессованием при давлении порядка 1…2 МПа. При изготовлении крупногабаритных изделий сложной формы из композитов со связующим горячего отверждения давление формования составляет 70…90 КПа (вакуумный способ).

Давление, необходимое для получения качественного изделия при намотке, создаётся либо посредством предварительного натяжения наматываемой ленты, либо прикаткой роликом или валиком.

Отверждение полимерной матрицы. В результате этой операции фиксируется форма изделия и образуется окончательная структура композита, определяющая его свойства. Основные технологические параметры отверждения – температура и время процесса. Они определяются в основном типом связующего, геометрией детали (в частности, толщиной стенок), степенью предварительного отверждения и т.п.

Температура отверждения, например, эпоксидных и фенольных связующих составляет 130...180°С, кремнийорганических – 200...220°С, полиимидных – не превышает 350°С. Продолжительность отверждения чаще всего определяется экспериментально. В первом приближении время процесса находится из расчёта 3...5 мин на 1 мм толщины стенки изделия.

Доработка элемента и сборка. После формования композитного элемента при необходимости осуществляется его доработка, которая может состоять в подрезании торцов, сверлении крепёжных отверстий и других видах механической обработки. Резание композиционных волокнистых материалов осуществляется на обычных станках с применением твёрдосплавного и алмазного инструмента.

Для монтажа и соединения с другими деталями применяют клеевые соединения, механическое крепление и соединение через промежуточные металлические законцовки (типа фланцев или фитингов), вматываемые в композиционную деталь.

Объём сборочных работ после формования в значительной степени определяется конструкцией изготавливаемого элемента.

Рассмотрим более подробно основную и наиболее специфическую для рассматриваемых материалов технологическую операцию – формообразование композитных элементов.

9.2 Прессование элементов из волокнистых композитов

Прессование является одним из наиболее распространённых методов формообразования деталей из композиционных материалов. В настоящее время прессование используют для серийного изготовления силовых деталей небольших и средних размеров, а также плоских плит и листов (обшивок). Прессование деталей из полимерных композиционных материалов осуществляется с помощью пресс-формы (рисунок 9.1), в которой создаются необходимое давление и температура для формования заготовки и отверждения полимерной матрицы. Нагрев пресс-формы выполняется с помощью электрона-

гревателей, размещённых в плитах матрицы и пуансона. Давление формования создаётся с помощью гидравлического пресса.

Прессованием изготавливают детали из материалов с хаотическим и ориентированным расположением армирующих волокон. При изготовлении деталей, в которых композит должен иметь слоистую структуру с определённой ориентацией волокон, используют заготовки из препрегов (лент или тканей). В этом случае укладке материала в пресс-форму предшествует операция раскроя. Раскрой полуфабриката (препрега) состоит в резке или вырубке исходного материала на заготовки требуемой конфигурации. Операция раскроя может выполняться с помощью ножа, ножниц или простых штампов. В настоящее время для раскроя препрегов применяют также лазерные установки и устройства для резки струёй воды.

Полученные заготовки укладываются в определённом порядке в пакет. Разделительная плёнка, наносимая на препрег при его изготовлении, снимается с каждой заготовки непосредственно перед её укладкой на предыдущий слой. Собранный пакет слегка спрессовывается или предварительно формуется в подогретом состоянии для удаления воздуха и сохранения расположения слоёв при укладке в полость матрицы пресс-формы.

Собранная слоистая заготовка помещается в предварительно нагретую пресс-форму и выдерживается там некоторое время. После нагрева, когда связующее размягчается и начинает переходить в вязко-текучее состояние, производится полное смыкание пресс-формы. Под действием создаваемого прессом давления волокнистая масса полностью заполняет объём между пуансоном и матрицей. При необходимости для облегчения удаления летучих и лучшего размещения материала в форме вначале проводят несколько подпрессовок (размыканий и смыканий пресс-формы).

Материал в пресс-форме выдерживается при температуре отверждения определённое время, в течение которого

В зависимости от того, к какой поверхности предъявляются требования по точности и шероховатости, выбирают негативную (вогнутую) или позитивную (выпуклую) форму. Для плоских деталей используются плоские плиты. Материалом форм служит гипс (на несколько деталей), дельта-древесина (до 100 деталей), алюминиевые сплавы и стали (свыше 100 деталей).

Автоклавы представляют собой герметичные цилиндрические сосуды давления с полусферическими днищами, заполненные воздухом или азотом, снабжённые нагревательными устройствами. Размеры автоклава определяются габаритами изготавливаемых элементов. Например, фирмой Локхид эксплуатируется автоклав диаметром 6 м и длиной 20 м.

В производстве летательных аппаратов вакуумное и автоклавное формование применяется для изготовления в мелкосерийном производстве пространственных деталей, панелей и отсеков сложной формы и больших размеров.

9.4 Намотка

9.4.1 Основные этапы процесса

Намоткой называется процесс формообразования элементов или конструкций из композитов, при котором заготовки получают путём автоматической укладки армирующего материала, обычно пропитанного полимерным связующим, на вращающиеся формы или оправки по заданным траекториям. Оправки или формы имеют конфигурацию и размеры, соответствующие внутренним размерам изготавливаемой детали. Формование детали намоткой завершается отверждением намотанной заготовки. Оправка после отверждения обычно удаляется, в отдельных случаях она может оставаться и выполнять функцию конструктивного элемента.

Обычно намотка производится нитями, жгутами, лентами и тканью, пропитанными связующим. Материал при намотке должен укладываться с некоторым натяжением, которое способствует увеличению давления формования и получению монолитной беспористой структуры композита. Сжатие связующего предварительно растянутыми волокнами улучшает взаимодействие полимерной матрицы и армирующих волокон, что улучшает прочность изделия, позволяет повысить сопротивление материала растрескиванию. Оптимальные значения натяжения при намотке нитями составляют 5…15% от разрушающего усилия нити. Увеличение натяжения выше оптимального приводит к обеднению композиции связующим и повреждению волокон, что

снижает прочность композита. Меньшие значения натяжения не обеспечивают должного выравнивания волокон и давления формования.

Данный технологический процесс включает в себя следующие операции:

1) наладку станка для намотки изделия (разработку и отладку программы управления или расчёт кинематики движения раскладчика и оправки, установку на станке армирующего материала или полуфабриката);

2) подготовку оправки для намотки (очистку, нанесение антиадгезионного слоя и установку на станке);

3) протяжку армирующего материала по тракту раскладчика и проверку рисунка намотки путём пробной намотки нескольких витков;

4) намотку заданного числа слоёв для создания необходимой толщины стенки (при намотке ведётся контроль основных технологических параметров и толщины наматываемой заготовки);

5) окончание процесса намотки, снятие оправки с заготовкой детали со станка и помещение их в автоклав или печь;

6) отверждение связующего (режимы процесса отверждения назначаются такими же, как и для изделий, получаемых методом автоклавного формования; после выдержки заданного режима производится охлаждение изделия совместно с технологической оснасткой);

7) снятие изделия с оправки или удаление последней из изделия;

8) термо- и механическая обработка изделия (при необходимости), контроль прочности и герметичности (для сосудов давления).

9.4.2 Виды и способы намотки

В зависимости от типа армирующего материала и его ориентации относительно поверхности или оси оправки различают несколько видов и способов осуществления намотки.

В зависимости от траектории, по которой армирующий материал укладывается на оправку, намотка разделяется на геодезическую, полярную, радиальную, комбинированную и продольно-поперечную. Классическим видом намотки является геодезическая, при котором укладка на поверхность оправки производится по геодезическим линиям с некоторым расчётным углом укладки θ. Такая траектория намотки позволяет получать равнопрочные конструкции.

Следует отметить, что геодезические линии представляют собой кривые на поверхности, достаточно малые дуги которых являются на данной по-

верхности кратчайшими путями между их концами. На плоскости это будут прямые, на круговом цилиндре – винтовые линии, на сфере – большие круги.

Геодезическую намотку можно осуществлять на различные поверхности: цилиндрические, конические, сферические, овалоиды, эллипсоиды, параболоиды, гиперболоиды, торовые поверхности и их различные сочетания, а также на поверхности коробчатого сечения.

При намотке на цилиндрическую поверхность нить или лента подходит к поверхности по касательной и укладывается по винтовой геодезической линии с некоторым постоянным углом укладки, определяемым из соотношения $\sin\theta_D = d/D$ (рисунок 9.3).

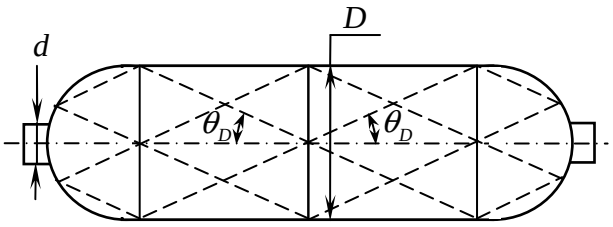


Рисунок 9.3 – Геодезическая намотка на цилиндрическую поверхность

Раскладчик совершает возвратно-поступательные движения вдоль оправки, вращающейся с постоянной скоростью, в результате чего создаётся каркас взаимно пересекающихся витков армирующего материала. Процесс продолжается до получения стенки заданной толщины.

Геодезическая намотка конических оболочек осуществляется при тех же кинематических движениях оправки и раскладчика, однако она имеет некоторые особенности. Вследствие изменения диаметра оболочки она может осуществляться с постоянным углом намотки θ, с постоянным шагом намотки или с переменным углом намотки из условия получения равномерной толщины стенки. При постоянном угле или шаге намотки толщина стенки конической поверхности будет увеличиваться от бóльшего диаметра к меньшему.

При полярной плоскостной намотке виток нити или ленты располагается в одной плоскости на замкнутой цилиндрической или криволинейной поверхности вращения. При этом траектория укладываемого материала, естественно, отклоняется от положения геодезической линии. Плоскостная намотка позволяет избежать многочисленных пересечений витков нитей или лент, характерных для геодезической намотки. Кроме того, укладка материала может осуществляться с большей производительностью на упрощённом технологическом оборудовании. Плоскостной намоткой можно изготавливать, в принципе, те же поверхности, которые получаются геодезической намоткой.

Отклонение от геодезического положения витка при плоскостной намотке могут приводить к соскальзыванию укладываемого материала под действием технологического натяжения нити или ленты. Поэтому нужно обеспечить определённое значение коэффициента трения. Для равновесия нити на оправке необходимо выполнить условие

$$\mathrm{tg}\,\varphi \le \mu,$$

где φ – угол, характеризующий максимальное отклонение плоскостного витка от геодезического; μ – максимальный коэффициент трения укладываемого материала по поверхности оправки.

Радиальной, или кольцевой, называется намотка, осуществляемая при углах, близких к 90°. Этот вид намотки используется для усиления цилиндрической части оболочек с овалоидными днищами, образованных геодезической или плоскостной намоткой.

Продольно-поперечная намотка – это одна из первых схем изготовления цилиндрических оболочек узкими лентами, укладываемыми в продольном и кольцевом направлениях. Недостатком конструкций, полученных таким методом, является сложность соединения цилиндрической оболочки с днищами.

Изготовление элементов конструкций методом намотки производится на специальных станках. В зависимости от вида используемого материала их можно разделить на станки для намотки нитями или узкой лентой и станки для намотки тканью. Станки для намотки нитями наиболее разнообразны по конструкции, назначению и используемым системам управления. Наиболее просты двухкоординатные системы управления, в которых задающим является вращение оправки, а следящим или управляемым – возвратно-поступательное перемещение раскладчика, параллельное оси оправки. Многокоординатные системы позволяют управлять одновременно большим числом перемещений, например двумя или более движениями раскладчика и вращением оправки. Это даёт возможность изготавливать оболочки сложной формы.

В заключение отметим, что различают «сухую» намотку с применением предварительно пропитанной и просушенной нити, ленты или ткани и «мокрую» намотку, при которой связующее непосредственно вводится в процессе намотки.