Памяти В.Н. Белова
и В.М. Коликовой

Министерство общего и профессионального образования РФ

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Б.Д. Агапьев, В.В. Козловский

Лабораторные работы по физике

ПРАКТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2012

УДК 530:519.2

Б.Д.Агапьев, В.В.Козловский. Практическая обработка экспериментальных данных / Учебное пособие. - С-Пб, 2012, 61 с.

Пособие предназначено для студентов младших курсов, выполняющих работы в учебной лаборатории кафедры Экспериментальной физики. В пособии изложены основы обработки, анализа и интерпретации экспериментальных данных. Основное внимание уделено доступности изложения и практическим рекомендациям, действиям, необходимым при записи и графическом представлении результатов эксперимента, оценивании их погрешностей, статистическом анализе данных. Пособие содержит основной материал по обработке экспериментальных данных, который является обязательным для изучения студентами всех специальностей, проходящими физический практикум. В нем изложены также базовые сведения статистического анализа. В приложении содержатся таблицы численных значений необходимых статистических величин и рекомендации по работе с протоколом-отчетом, используемым в лаборатории физики. Пособие рекомендовано к изданию кафедрой экспериментальной физики физико-механического факультета СПбГПУ.

Ил.12. Табл.14.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Измерение физических величин

Практическая деятельность человека всегда являлась источником знаний об окружающем материальном мире и его свойствах. Точные измерения дают нам информацию о законах природы, обеспечивают потребности науки и техники. Наука начинается с тех пор, как начинают измерять, - говорил Д.И. Менделеев. Для правильного измерения требуется владение современной измерительной аппаратурой, знание основных приемов и способов измерений, обработки и интерпретации экспериментально полученных данных. Настоящее пособие должно помочь студентам в освоении правил и приемов обработки и анализа данных эксперимента в учебной лаборатории физики.

Количественную характеристику свойств материальных объектов и физических явлений представляет ***физическая величина***.

Под ***измерением*** физической величины понимается определение опытным путем ее численного значения в используемой системе единиц при помощи ***измерительных приборов***. Результатом измерения является ***значение физической величины***, состоящее из числа и наименования единицы измерения.

Основные типы физических величин

Различают следующие основные типы физических величин.

1) Случайная величина. Значение такой физической величины определяется случайными процессами, поэтому результат отдельного измерения не может быть однозначно предсказан заранее. Случайными величинами являются, например, скорости молекул газа, отклонения амплитуды сетевого напряжения от номинального значения, время, необходимое для распада ядра радиоактивного атома, и др. Вместе с тем, проведение достаточно большого количества измерений случайной величины позволяет установить статистические закономерности, которым подчиняются их результаты. Выявление, изучение и учет таких закономерностей составляют неотъемлемую часть процесса измерений.

2) Постоянная величина,- физическая величина, значение которой не изменяется за время, превышающее длительность измерения. К таким величинам относятся ***физические постоянные***, например, скорость света в вакууме, заряд электрона, постоянная Больцмана и т.п. Могут считаться постоянными величинами также некоторые физические характеристики конкретного объекта, находящегося при фиксированных условиях. Этот тип физических величин чаще всего встречается в эксперименте, например, при определении длины образца, его массы, теплоемкости и т.п. Однако многократные измерения постоянной величины могут давать неодинаковые результаты. Дело в том, что результаты измерений подвержены неконтролируемым воздействиям внешней среды, а также воздействию неконтролируемых процессов в самих исследуемых объектах, и в используемых измерительных приборах. Вследствие этого постоянная величина зачастую проявляет себя как случайная величина, а результаты ее измерений отражают случайную природу воздействий и отвечают определенным статистическим закономерностям. Именно поэтому для обработки результатов измерения постоянной величины естественно использовать методы, характерные для обработки результатов измерения случайной величины.

3) Изменяющаяся **(**или ***переменная*****)** ***физическая величина***. Такая величина закономерно меняется с течением времени вследствие процессов, проходящих в исследуемом объекте. Примерами могут служить: уменьшение электрического заряда на конденсаторе после отключения его от источника напряжения, затухание амплитуды колебаний свободного маятника, изменение мгновенного значения напряжения переменного синусоидального тока и т.п.

4) Еще один тип физических величин, выделяемый в теории обработки результатов измерений, это ***нестабильная величина***. Она бессистемно изменяется, "плывет" или "дрейфует", с течением времени, без каких бы то ни было статистических закономерностей. Так бессистемно изменяются координаты частиц при броуновских блужданиях. Основная характеристика нестабильной величины - отсутствие у экспериментатора информации о ее зависимости от времени. Измерения такой величины дают набор данных, не несущих сколько-нибудь полезных сведений о самой величине. Вместе с тем, нестабильная величина может быть переведена в разряд изменяющихся (или случайных) величин, если экспериментально или теоретически установлена закономерность (возможно, статистическая) в ее зависимости от времени. Для броуновских блужданий такие статистические закономерности были установлены Эйнштейном.

Важной особенностью процесса измерения, которая должна учитываться при обработке результатов, является влияние точности применяемых измерительных приборов на определение типа исследуемой физической величины. Случайный характер величины может вообще не проявиться, если использованы малочувствительные приборы. Например, если случайные вариации постоянного напряжения не превышают 0,1 мВ, то его измерение стрелочным вольтметром с ценой деления 0,1 В всегда будет давать один и тот же повторяющийся результат. Но это не означает, что напряжение измерено точно, так как неопределенность (погрешность) результата измерения в данном случае задается погрешностью прибора. А, значит, вывод о том, что напряжение является постоянной физической величиной, окажется неправомерным. Убедиться в этом можно, если воспользоваться более точным цифровым измерительным прибором в режиме измерения микроВольт. Такой прибор позволит зафиксировать изменения напряжения и вывести соответствующие статистические закономерности изменений.

Основные виды измерений физических величин

Различают прямое и косвенное измерения.

При ***прямом измерении*** значение физической величины находят непосредственно с помощью измерительного прибора, например, при измерении длины линейкой, напряжения - вольтметром. Если прямые измерения невозможны, используются косвенные измерения.

При ***косвенном измерении*** значение физической величины вычисляется на основании известной зависимости этой величины от других, допускающих прямое измерение. Например, при косвенном измерении средней плотности тела мы определяем плотность как отношение массы тела, полученной прямыми измерениями, к объему тела, вычисленному по его геометрическим размерам, полученным прямыми измерениями. Аналогично косвенное измерение электрического сопротивления резистора заключается в его вычислении по закону Ома с использованием значений напряжения на резисторе и тока через него, полученных прямыми измерениями.

Измерения могут выполняться как однократные и многократные.

Однократное измерение дает единственное значение, которое и принимают за окончательный результат измерения искомой величины.

Многократные измерения проводят путем повторения однократных измерений одной и той же физической величины. В результате получаем набор данных, ***выборку*** из n значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

За ***окончательный результат*** многократного измерения физической величины, используемый в качестве оценки ее значения, как правило, принимается ***среднее арифметическое*** (выборочное среднее) результатов всех отдельных измерений

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \qquad (1.1)$$

Поскольку при такой оценке результата ошибки отдельных измерений отчасти сокращают друг друга, многократные измерения обычно обеспечивают повышение точности результатов. Однако, следует учитывать, что измерения, к примеру, ***изменяющейся*** (или ***нестабильной) величины***, проводимые в различные моменты времени, фиксируют ее значения в новых условиях. Набор результатов таких измерений представляет собой результаты принципиально неповторимых измерений (т.к. время нельзя повернуть вспять), и не может рассматриваться как набор результатов многократных измерений.

Контрольные вопросы

1. Какие свойства реальных объектов позволяют ввести понятие "физическая величина"?
2. Что понимается под термином "измерение"? Как получается количественный результат измерения?
3. Перечислите основные типы измерений.
4. Чем многократные измерения отличаются от однократных?
5. К каким основным типам можно отнести измеряемые физические величины?

2. Погрешности измерений

Неопределенность результата измерения, - или погрешность, - является неотъемлемой частью любого измерения. ***Неопределенность результата измерения (погрешность)*** - это количественная характеристика неточности, или неоднозначности результата измерения, определяющая разброс значений (ширину диапазона значений) измеряемой величины. При обработке экспериментальных данных неопределенность (погрешность) определяют одновременно с окончательным результатом измерения. Без указания погрешности нет смысла приводить один лишь окончательный результат в качестве «истинного значения» измеряемой физической величины, так как из-за наличия неопределенности можно указать лишь диапазон (доверительный интервал), в котором с той или иной вероятностью содержится это значение.

Неопределенность (погрешность) $\boldsymbol{\Delta x}$, выраженная в единицах измеряемой физической величины $\boldsymbol{x}$, и определяющая ширину интервала $\bar{x} - \Delta x \le x \le \bar{x} + \Delta x$, содержащего истинное значение физической величины с заданной вероятностью, называется ***абсолютной неопределенностью (абсолютной погрешностью)***. Абсолютная погрешность не всегда отражает качество измерений. Так, при измерении расстояния от Земли до Луны абсолютная погрешность в 1 метр свидетельствует о высоком качестве измерения, но при измерении роста человека такая погрешность совершенно неприемлема.

Качество измерения характеризуется ***относительной неопределенностью (относительной погрешностью)***, безразмерным отношением абсолютной неопределенности к окончательному результату измерения

$$\delta x = \frac{\Delta x}{\bar{x}}. \qquad (2.1)$$

Относительная неопределенность используется как в абсолютном, так и в процентном выражении. Большей точности измерения соответствует меньшее значение относительной погрешности, большей относительной погрешности отвечает меньшая точность.

Рассмотрим основные типы неопределенностей, проявляющиеся в измерительных экспериментах.

Промахи или грубые погрешности.

Такие неопределенности возникают вследствие неисправности измерительных приборов или ошибок в эксперименте, сделанных по невнимательности. Естественно стремление избегать промахи, но если стало понятно, что они все-таки допущены, соответствующие им результаты измерений просто отбрасывают. Представим следующую ситуацию: с помощью цифрового измерительного прибора проводят исследования электрического тока в цепи. Один из разрядов индикатора используемого прибора неисправен и постоянно воспроизводит ноль. Если этот разряд приходится на первую или вторую цифру результата измерения, то промах неизбежен.

В процессе непосредственного проведения измерений бывает сложно определить, содержит ли полученный результат промах. Количественный критерий, позволяющий отсеивать промахи, будет описан ниже.

Систематические погрешности.

Систематическая неопределенность (неопределенность типа Б, систематическая погрешность) - это неопределенность результата измерения, порождаемая самой измерительной системой (измерительными приборами, методикой измерений, методом обработки результатов, неточностью наших представлений о природе исследуемых физических явлений, и т.д.), и не имеющая случайного характера. Систематические неопределенности приводят к отклонению измеренного значения от истинного значения физической величины всегда в одну сторону (ее завышения или занижения). Различают следующие типы систематических неопределенностей .

Методическая неопределенность (модельная погрешность). В основе любого эксперимента лежит определенная физическая модель, то есть, насколько возможно полное физическое описание исследуемого объекта или явления. Модель содержит математическое описание, набор математических соотношений, включающих измеряемые физические величины.

Если модель построена неточно, и в ней не учтены важные процессы или факторы, влияющие на результат измерений, то вычисление измеряемых величин по рабочим формулам неточной модели будет приводить к так называемой ***модельной погрешности***. В эксперименте стараются поместить лабораторную установку в такие условия, которые бы максимально соответствовали требованиям модели. Однако полностью исключить несоответствие модели и экспериментальной ситуации удается далеко не всегда.

В качестве примера модельной погрешности можно рассматривать неучтенное изменение напряжения на участке электрической цепи, измеряемого вольтметром. Такое изменение возникает из-за шунтирования цепи внутренним сопротивлением вольтметра. Здесь методическую ошибку измерения можно скомпенсировать введением ***поправок*** к показаниям вольтметра, но важно другое - при наличии в цепи вольтметра изменяются электрические процессы в ней. Значит, первоначальная модель процессов в этой цепи, не учитывающая включение вольтметра, является неточной.

Следует отметить, что модельные погрешности являются наиболее сложными для анализа и учета. Только на основании эксперимента можно сделать обоснованное заключение о приемлемости описания полученных данных с помощью использованной физической модели. Зафиксированные модельные погрешности, то есть, фактически, несоответствия теории и эксперимента, служат важнейшим стимулом развития науки, требуя уточнять наши представления о физической природе окружающего мира. В свое время именно обнаруженные несоответствия между теорией и экспериментом привели к созданию теории равновесного теплового излучения, квантовой механики, теории относительности.

Инструментальная неопределенность (приборная погрешность), это систематическая неопределенность результата измерения, причиной которой является сам измерительный прибор. Как правило, такая погрешность неизвестна, и не может быть учтена введением поправок. Ее можно оценить только путем сравнения показаний прибора с показаниями другого, более точного (поверки). Иногда результаты поверки приводят в паспорте прибора, однако чаще указывают максимально возможную погрешность для приборов данного типа (***предел допускаемой погрешности***). Например, в паспорте точных наручных механических часов указывается, на сколько долей секунды могут уходить эти часы в сутки. Реальный уход исправных часов не превышает этой величины.

Случайные погрешности.

Случайные неопределенности (***случайные погрешности***, ***неопределенности типа А***) это неопределенности, которые при повторных измерениях изменяются непредсказуемым образом, демонстрируя свою случайную природу. В каждом отдельном их появлении не наблюдается какой-либо закономерности, они возникают вследствие множества причин, воздействие которых на каждое отдельное измерение невозможно учесть или заранее установить. Такими причинами могут оказаться, к примеру, незначительные колебания температуры различных деталей установки, скачки напряжения, вибрации, турбулентные движения воздуха, трение в механизмах, ошибки считывания показаний приборов и т.п.

Для объективного учета случайных погрешностей определяются статистические закономерности, проявляемые ими при многократных измерениях. И уже с учетом этих закономерностей рассчитывается ширина диапазона значений измеряемой физической величины и вероятность попадания ее значений в такой диапазон. Подробнее об этом будет сказано в следующем разделе.

Контрольные вопросы

1. Что такое погрешность (неопределенность) измерения ?
2. В чем заключается отличие абсолютной неопределенности от относительной ?
3. Чем определяется качество измерения ?
4. Каковы причины появления промахов ?
5. Что такое систематическая погрешность ?
6. Какова роль модельных несоответствий в развитии науки ?
7. Что такое случайная погрешность и какие причины приводят к ее появлению ?

3. Статистическое распределение случайной величины

Основным типом погрешностей, изучению которых посвящен этот раздел, являются случайные погрешности (неопределенности типа А). Они поддаются строгому математическому описанию, что позволяет делать выводы о качестве измерений, в которых они присутствуют. Погрешности других типов более сложны для анализа, их выявляют и анализируют только в условиях конкретного эксперимента. Чтобы знать, как надлежит работать со случайными погрешностями, прежде всего разберемся со способами статистического описания случайных величин.

Получение распределения случайной величины и его описание

Рассмотрение начнем с предполагаемого эксперимента, в котором выполняются многократные прямые измерения какой-то случайной физической величины, проводимые без изменения условий эксперимента. Статистические закономерности в поведении величины просматриваются из гистограммы.

Гистограмма - ступенчатая диаграмма, показывающая, как часто встречаются те или иные результаты измерения. При этом диапазон значений измеренной величины делится на ***равные интервалы***, в каждом из которых строится столбец, высота которого пропорциональна числу результатов, оказавшихся в этом интервале.

Пусть диапазон значений измеренной величины лежит между наименьшим значением x_{min} и наибольшим x_{max}, а ширина каждого интервала обозначена Δx. Тогда ***для построения гистограммы*** выбираются следующие координаты: по оси абсцисс откладывается измеряемая величина x, по оси ординат - отношение $\Delta n/n\Delta x$ (рис.3.1). Здесь n - полное количество проведенных измерений, Δn - количество результатов, попавших в интервал $[x, x+\Delta x]$. Отношение $\Delta n/n$ это ***доля результатов***, оказавшихся в указанном интервале.

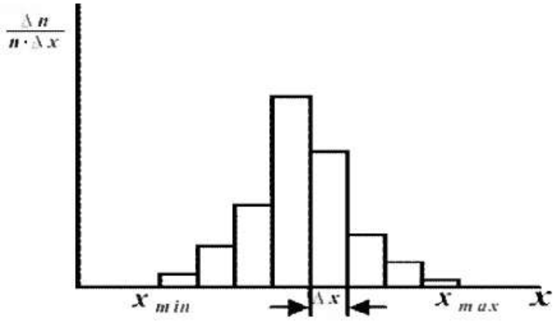


Рис.3.1 Гистограмма

Оно имеет смысл ***вероятности*** попадания результата отдельного измерения в данный интервал. Выражение же $\Delta n/(n\cdot\Delta x)$, получаемое после деления доли $\Delta n/n$ на ширину интервала Δx, имеет смысл ***плотности вероятности***.

При очень большом числе измерений ($n\to\infty$) весь диапазон изменения величины x можно разбить на бесконечно малые интервалы dx , как это делается в математике, и найти количество результатов dn в каждом из них. В этом случае гистограмма превратится в плавную кривую - график функции

$$\rho(x)=\frac{dn}{n\cdot dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta n}{n\cdot\Delta x}. \qquad (3.1)$$

Такую функцию называют ***плотностью вероятности***, или ***распределением*** вероятностей, или - просто ***распределением***. Примеры конкретных распределений можно найти на рис.3.2.

Распределение выступает в роли исчерпывающей характеристики случайной величины. Закон распределения можно задать в виде функционального выражения, графика, таблицы или каким-то другим способом. При любом варианте задания устанавливается связь между вероятностью того, что результат однократного измерения случайной величины попадет в заданный интервал возможных значений, и шириной этого интервала.

Хотя распределение и содержит полную информацию, однако пользоваться им не всегда удобно. Оперируя результатами проведенного эксперимента, вместо функции распределения лучше иметь привычные числовые величины - ими являются ***среднее значение*** и ***дисперсия***.

Среднее значение $\bar{x}$ измеряемой величины x (его называют также выборочным средним) соответствует центру распределения, около которого группируются результаты отдельных измерений

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}. \qquad (3.2)$$

Поэтому среднее и выбирается в качестве окончательного результата измерения, как было сказано выше.

Дисперсия вводится как средний квадрат отклонения отдельных результатов от среднего значения случайной величины

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \qquad (3.3)$$

Среднеквадратичное отклонение (называемое также ***стандартным отклонением***, или ***стандартной неопределенностью***, часто ***СКО***) определяется как квадратный корень из дисперсии

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \qquad (3.4)$$

Как видно из способа вычисления σ, эта величина характеризует разброс результатов отдельных измерений вокруг среднего значения, то есть, ***ширину распределения***. Конечно, точные значения $\bar{x}$ и σ являются предельными величинами, и могут быть получены лишь тогда, когда полное количество проведенных измерений достаточно велико, в пределе при $n \to \infty$. При конечных n правильнее использовать термин ***экспериментальная оценка***, который в равной мере относится и к среднему значению, и к дисперсии.

Следует обратить внимание на знаменатель этого выражения. Обычное определение среднего по серии из n измерений (каждую такую серию называют выборкой) всегда содержит в знаменателе число измерений n (выборочное среднее). Однако получаемая при этом величина выборочной дисперсии будет случайной величиной, имеющей различные значения в разных сериях измерений. В математической статистике показывается, что среднее по различным сериям измерений значение дисперсии будет выражаться через выборочную дисперсию с дополнительным множителем $\frac{n}{n-1}$, который и приводит к формуле (3.3).

Заметим также, что знаменатель выражений (3.3) и (3.4) обращается в нуль при $n=1$. Насколько это правильно? Ведь в этом случае, казалось бы, σ^2 и σ становятся бесконечно большими. Обратимся к реальной ситуации, соответствующей $n=1$, т.е. к эксперименту, в котором выполнено только одно измерение x_1 величины x. Одного измеренного значения недостаточно, чтобы построить гистограмму и найти из нее дисперсию σ^2. Значит, дисперсия σ^2 и стандартное отклонение σ оказываются полностью неопределенными вследствие недостаточности экспериментальных данных. Выражения (3.2) - (3.4) учитывают приведенные соображения: если $n=1$, из (3.2) получается $\bar{x} = x_1$, и, как следствие, числитель, и знаменатель в (3.3) и (3.4) одновременно обращаются в нуль. Это свидетельствует об ожидаемой неопределенности значения x.

Отметим, что среднее значение $\bar{x}$ случайной величины нельзя расценивать как однозначный результат измерения. Иначе надо было бы полагать, что случайная величина всегда имеет только одно постоянное значение $\bar{x}$, чего не может быть в действительности из-за ее случайной природы. Случайные факторы, характеризующие форму распределения случайной величины, не объясняются только возможной неточностью измерительных приборов, а значит, среднеквадратичное отклонение σ, описывающее ширину распределения, объективно определяет характер поведения исследуемой случайной величины.

Нормальное распределение

Если, помимо характерных для распределения значений среднего и дисперсии, известен функциональный вид распределения случайной величины, то можно получить полную информацию о вероятности реализации случайной величины в любом заданном интервале значений. Рассмотрим это на примере ***нормального распределения Гаусса***. Нормальное распределение наиболее часто реализуется в природе. Поэтому при обработке данных измерений в науке и технике обычно предполагается нормальный закон распределения случайных погрешностей измерений.

В пользу применения нормального распределения имеются веские основания. А именно, оно всегда проявляется, если суммарная погрешность есть результат совместного воздействия большого числа факторов, каждому из которых соответствует малый вклад в суммарную погрешность. Причем совершенно неважно, по какому закону распределен каждый из вкладов в отдельности. Это является следствием центральной предельной теоремы математической статистики.

Нормально распределенная случайная величина x имеет следующие свойства:

1. Она может принимать непрерывный ряд значений от $-\infty$ до $+\infty$.

2. Центр распределения случайной величины одновременно является центром симметрии, т.е. одинаковые отклонения результатов измерения в меньшую и в большую стороны от центра встречаются одинаково часто.

3. Малые отклонения встречаются чаще больших, другими словами, реализуются с большей вероятностью.

Зависимость плотности вероятности нормального распределения от случайной величины дает ***формула Гаусса***

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}, \qquad (3.5)$$

где $\bar{x}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ соответствуют использованным в (3.2) - (3.4), $e \approx 2{,}71828$ - основание натуральных логарифмов. Кривые нормального распределения для трех значений $\boldsymbol{\sigma}$ (1, 0,5 и 0,25) и одинакового $\bar{x} = 3$ показаны на рис.3.2.

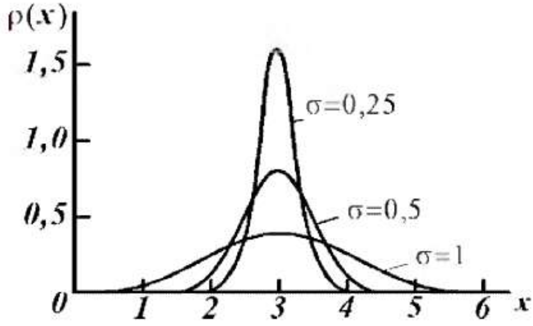


Рис.3.2 Нормальное распределение
для $\bar{x} = 3$, $\sigma = 0{,}25$; 0,5 и 1

Нормальное распределение симметрично относительно максимума, находящегося при $x = \bar{x}$. Значение функции Гаусса в максимуме равно

$$\rho_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}. \qquad (3.6)$$

Значение аргумента $x = \bar{x}$, при котором плотность вероятности максимальна, является ***наиболее вероятным*** при реализации случайной величины. Следовательно, среднее $\bar{x}$ - оценка наиболее вероятного значения случайной величины, распределенной по нормальному закону. Согласно (3.6) значение функции Гаусса в максимуме уменьшается с увеличением σ. Одновременно кривые на графике становятся более пологими, но полная площадь под кривой остается при этом неизменной.

Воспользуемся выражением (3.1) и получим из него

$$\frac{dn}{n} = \rho(x)dx.$$

Это соотношение означает, что вероятность попадания результата отдельного измерения в бесконечно малый промежуток dx равна площади под кривой распределения на этом промежутке. Если расширить промежуток до конечной величины $[x_1, x_2]$, то площадь под кривой даст вероятность P попадания результата измерения уже в конечный промежуток. Вероятность, как ***площадь под кривой плотности вероятности***, математически выражается интегралом

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \frac{\Delta n}{n} = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx. \qquad (3.7)$$

В скобках после P указано событие, для которого находится вероятность. При раздвигании границ промежутка в обе стороны до бесконечности интеграл от функции распределения

$$P(-\infty \le x \le \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1.$$

Смысл этого равенства заключается в том, что вероятность достоверного события равна единице. Достоверным событием в рассматриваемой ситуации является реализация любого значения случайной величины от $-\infty$ до $+\infty$ в результате ее однократного измерения.

Интегралы от функции Гаусса для различных пределов интегрирования вычислены и имеются в виде подробных таблиц. При обработке результатов измерений обычно определяется симметричный относительно $\bar{x}$ ***доверительный интервал*** $[\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x]$. Вероятность нахождения результата измерения в доверительном интервале называется ***доверительной вероятностью*** (также ***вероятностью охвата*** и ***надежностью***). При этом ***полуширина доверительного интервала*** Δx (***случайная погрешность***, или ***расширенная неопределенность***) выбирается так, чтобы она соответствовала заданному значению доверительной вероятности.

В Таблице 1 Приложения доверительная вероятность обозначена $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\alpha = P(\bar{x} - \Delta x,\ \bar{x} + \Delta x), \qquad (3.8)$$

а отношение полуширины доверительного интервала $\boldsymbol{\Delta x}$ к среднеквадратичному отклонению $\boldsymbol{\sigma}$ обозначено $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\sigma}. \qquad (3.9)$$

Доверительную вероятность $\boldsymbol{\alpha}$ можно рассчитать по приближенной формуле, полученной из (3.7):

$$\alpha \cong \sqrt{1 - e^{-2\varepsilon^2/\pi}}. \qquad (3.10)$$

Однако для практических целей проще запомнить несколько полезных чисел:

при $\boldsymbol{\varepsilon = 1}$ $\boldsymbol{\alpha = 0.68}$ (или **68**%),
при $\boldsymbol{\varepsilon = 2}$ $\boldsymbol{\alpha = 0.95}$ (или **95**%), (3.11)
при $\boldsymbol{\varepsilon = 3}$ $\boldsymbol{\alpha = 0.997}$ (или **99.7**%).

Смысл соотношений (3.11) заключается в установлении связи между полушириной интервала (расширенной неопределенностью) Δx вокруг $\bar{x}$ и вероятностью охвата, то есть, вероятностью попадания измеренного значения случайной величины в этот интервал, если величина распределена по нормальному закону. Так, результат измерения с вероятностью 68% попадет в ***стандартный*** интервал $\left[\bar{x}-\sigma,\ \bar{x}+\sigma\right]$, то есть, две трети всех измерений дают результат из этого интервала, но каждое третье измерение даст результат за его пределами. За пределами ***двух стандартов***, то есть, - интервала $\left[\bar{x}-2\sigma,\ \bar{x}+2\sigma\right]$, окажется уже один результат из двадцати, а для интервала в ***три стандарта*** $\left[\bar{x}-3\sigma,\ \bar{x}+3\sigma\right]$- только один из трехсот. Значит, интервал $\pm 3\sigma$ вокруг $\bar{x}$ является практически достоверным, так как подавляющее большинство отдельных результатов многократного измерения случайной величины окажется сосредоточенным именно в нем.

Опережая ход изложения, заметим, что часто используемое при обработке результатов измерений ***правило*** **3σ**, или ***правило трех стандартов***, основано на указанном свойстве нормального распределения. С учетом проведенного анализа можно установить наличие в результате отдельного измерения промаха, а значит, отбросить его, если результат измерения более чем на **3σ** отличается от среднего значения исследуемой случайной величины.

Контрольные вопросы

1. Что такое гистограмма случайной величины и как ее строят ?
2. При каких условиях гистограмма переходит в график распределения плотности вероятности ?
3. Что характеризуют средним значением и среднеквадратичным отклонением ? Как эти величины оценивают исходя из экспериментальных результатов ?
4. Почему нормальное распределение чаще других встречается в эксперименте ?
5. Какова математическая форма записи нормального распределения с помощью функции Гаусса ?

4. Погрешности прямых измерений

Рассмотрим ситуацию, наиболее часто встречающуюся при выполнении физического эксперимента. Допустим, многократным прямым измерением получены $\boldsymbol{n}$ значений (***выборка***) постоянной величины $\boldsymbol{x}$:

$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$. (4.1)

Все отдельные измерения выполнены одним методом с одинаковой степенью тщательности (их называют ***равноточными***), но результаты имеют разброс, т.е. измеренные значения величины отличаются друг от друга. Хотя не исключено, что среди них могут оказаться и одинаковые. Набор данных (4.1) подлежит совместной обработке для определения окончательного результата многократного измерения и оценивания его неопределенности.

Прежде всего должны быть выявлены ***промахи***, и соответствующие им результаты отброшены. С этой целью обычно бывает достаточно внимательно просмотреть таблицы результатов, обращая внимание на "неестественные" значения измеряемой величины, которые резко отличаются от других.

Следующим этапом обработки является выявление тех ***систематических погрешностей***, которые можно вычислить и учесть в виде поправок к результатам измерений.

Когда промахи устранены, и введены поправки на систематические погрешности, в данных (4.1) остается учесть только ***случайные и приборные погрешности***. Перейдем к изучению правил работы с ними.

Случайные погрешности

Случайные погрешности (неопределенности) проявляются в разбросе результатов отдельных измерений постоянной величины. Для определения разброса, т.е. оценивания ***неопределенности результата отдельного измерения***, требуется вычислить среднеквадратичное отклонение, которое находится согласно (3.4). С увеличением количества измерений $\boldsymbol{n}$ оценка величины величины стандартного отклонения $\boldsymbol{\sigma}$ практически перестает зависеть от $\boldsymbol{n}$, а это означает, что $\boldsymbol{\sigma}$ определяется точнее, а значит, уменьшается неточность при оценивании неопределенности результата отдельного измерения. За окончательный результат многократного измерения принимают выборочное среднее значение $\bar{x}$. Выборочное среднее также является случайной величиной, изменяющейся от одной серии измерений к другой. С ростом числа измерений $\boldsymbol{n}$ оценка $\bar{x}$, находимая по формуле (3.2), также стабилизируется. Следовательно, должна уменьшаться неопределенность среднего. И действительно, стандартная неопределенность среднего $\bar{x}$ (обозначается $\sigma_{\bar{x}}$) оказывается меньше неопределенности σ однократного измерения.

Связь среднеквадратичного отклонения $\sigma_{\bar{x}}$ окончательного результата (другими словами, стандартной неопределенности среднего значения) и среднеквадратичного отклонения σ отдельного измерения задается соотношением

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \qquad (4.2)$$

Важным практическим выводом из (4.2), который относится к многократным измерениям, содержащим только случайные ошибки, является заключение о возможности уменьшить неопределенность окончательного результата при увеличении количества n отдельных измерений. Однако также следует помнить, что повышение точности не дается бесплатно. Так, чтобы узнать дополнительную цифру в $\bar{x}$, т.е., повысить точность в 10 раз, количество измерений требуется увеличить в 100 раз!

Рассмотрим самый распространенный случай нормального распределения как результатов отдельных измерений x_i, так и среднего значения $\bar{x}$. За оценку погрешности (расширенной неопределенности) окончательного результата многократного измерения принимается величина Δx, задающая ширину симметричного относительно среднего $\bar{x}$ интервала значений от $\bar{x} - \Delta x$ до $\bar{x} + \Delta x$, называемого ***доверительным интервалом.***

Вероятность найти значение измеряемой величины в указанном доверительном интервале - ***доверительная вероятность*** (или ***вероятность охвата***) α **:**

$$\alpha = P(\bar{x} - \Delta x \le x \le \bar{x} + \Delta x). \qquad (4.3)$$

Для нормального распределения неопределенностей, описанного в предыдущем разделе, в Таблице 1 Приложения 1 приведены доверительные вероятности α для доверительных интервалов, размеры которых выражены в долях среднеквадратичного отклонения

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\sigma_{tab}}. \qquad (4.4)$$

При этом, если доверительный интервал определяется для отдельного измерения, то под σ_{tab} в формуле (4.4) следует понимать стандартную неопределенность σ результата этого отдельного измерения. Если же доверительный интервал определяется для результата многократного измерения, то под σ_{tab} необходимо подразумевать среднеквадратичное отклонение (стандартную неопределенность) окончательного результата многократного измерения, т.е. $\sigma_{\bar{x}}$. В этом случае с помощью указанной таблицы случайную погрешность (расширенную неопределенность) легко найти по формуле

$$(\Delta x)_{\text{случ}} = \varepsilon \cdot \sigma_{\bar{x}} = \varepsilon \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (4.5)$$

причем величину ε определяют по таблице для заданного значения доверительной вероятности.

Случайная погрешность однозначно определяется из таблицы только при одновременном задании двух численных значений: полуширины доверительного интервала (в долях ε), являющейся оценкой расширенной неопределенности, и соответствующего ему значения доверительной вероятности α. Просто "погрешность" не имеет смысла, если не задана доверительная вероятность, так как, не зная этой вероятности, невозможно определить, насколько надежен полученный результат.

Обычно при представлении результатов измерений вместо (4.3) используют запись вида

$$x = \bar{x} \pm \Delta x, \ \ \alpha = ...$$

Главный вывод: увеличение надежности результата измерения является следствием расширения доверительного интервала, хотя, на первый взгляд, происходит совсем обратное. Но ведь, чем шире доверительный интервал, тем вероятнее, что измеряемая величина не находится за его пределами! Выбор конкретного значения доверительной вероятности определяется характером выполняемых измерений. При обычных измерениях достаточно ограничиться вероятностью 0,68 или 0,95 - им соответствуют значения ε, равные 1 и 2. Для измерений, к которым предъявляются высокие требования по надежности, следует использовать α = 0,997, которому соответствует ε = 3 (так называемое ***правило трех стандартов***). Если при обработке результатов лабораторных работ применяется стандартное значение доверительной вероятности α = 0,68, то ее можно не указывать в записи результата $x = \bar{x} \pm \Delta x$, поскольку α = 0,68 – принятый в мировой практике уровень доверительной вероятности, который не оговаривается специально.

В учебном эксперименте значение $\sigma_{\bar{x}}$ оценивают, исходя из результатов отдельных измерений, количество которых обычно не превышает 5 - 10 (***малые выборки***). Поэтому точность оценивания стандартной погрешности $\sigma_{\bar{x}}$ невелика. Это вносит дополнительную неопределенность в окончательный результат многократного измерения.

Чтобы ее учесть, следует расширить границы доверительного интервала, находимого выше для точно известной величины $\sigma_{\bar{x}}$. Понятно, что меньшему количеству отдельных измерений должен сопоставляться более широкий доверительный интервал. Теория малых выборок математической статистики рекомендует вместо (4.5) использовать другое выражение для ***расширенной неопределенности*** результата (***случайной погрешности***)

$$\Delta x_{случ} = t(\alpha, n) \cdot \sigma_{\bar{x}}, \qquad (4.6)$$

где $\boldsymbol{t(\alpha, n)}$ - коэффициенты, зависящие от полного количества измерений $\boldsymbol{n}$ и заданного значения доверительной вероятности $\boldsymbol{\alpha}$, они носят название ***коэффициентов охвата (коэффициентов Стьюдента)***. Для различных значений $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{n}$ их можно найти в Таблице 2 Приложения. Изучив таблицу, несложно заметить, что при увеличении количества измерений коэффициенты практически совпадают с использованными выше величинами $\boldsymbol{\varepsilon}$ для того же значения доверительной вероятности $\boldsymbol{\alpha}$. Это - следствие перехода от оценок параметров нормального распределения к их точному заданию, что реализуется только при очень большом количестве выполняемых измерений.

Приборные погрешности

Возникновение ***приборных погрешностей*** (***инструментальных неопределенностей***) обусловлено свойствами используемых измерительных приборов. Погрешность каждого конкретного прибора является систематической, но ее значение обычно неизвестно, а значит, ее невозможно исключить введением в результат измерения соответствующей поправки.

Для ***стрелочных приборов*** цена наименьшего деления шкалы обычно согласована с погрешностью самого прибора. И, если класс точности используемого прибора неизвестен, то за величину ***приборной погрешности*** $\boldsymbol{\Delta x_{приб}}$ принимают ***половину цены его наименьшего деления***. Понятно, что при считывании показаний со шкалы нецелесообразно стараться определить доли деления, так как результат измерения от этого не станет точнее.

Указанным образом необходимо работать также с линейками, микрометрами, и шкалами других приборов, в том числе с сеткой на экране осциллографа. Например, на экране осциллографа нанесена сетка с размерами клетки 10 х10 или 5 х5 мм, а для отсчета малых делений имеется дополнительная миллиметровая сетка. Погрешность отсчета по сетке составит не менее 0,5 мм. На самом деле, надо учитывать также ширину линий изображения на экране осциллографа, которая обычно не меньше 1 мм, что увеличивает погрешность отсчета по сетке на экране. Если размеры наблюдаемых изображений порядка 5 -10 мм, им соответствует погрешность 5-10%, и такой осциллограф нельзя использовать для более точных измерений.

Инструментальную неопределенность ***цифрового измерительного прибора*** рассчитывают по паспортным данным, содержащим формулу для расчета погрешности именно данного прибора. При отсутствии паспорта за оценку погрешности $\Delta x_{\text{приб}}$ принимают ***единицу наименьшего разряда*** цифрового индикатора. Так, при частоте 161,2 кГц, измеренной цифровым частотомером, погрешность измерения оценивают как 0,1 кГц.

Если в паспорте прибора указан ***предел допускаемой погрешности*** $\Delta x_{\text{пред}}$ (предельно допустимая для данного класса точности прибора при рекомендованных условиях работы), то ***приборную погрешность*** оценивают по приближенной формуле

$$\Delta x_{\text{приб}} = \Delta x_{\text{пред}}/3.$$

Если бы приборные ошибки были распределены по нормальному закону, такой выбор соответствовал бы правилу трех стандартов, а полученная по этой формуле приборная погрешность $\Delta x_{\text{приб}}$ отвечала бы доверительной вероятности α=68%. Доверительной вероятности α=95% соответствовала бы приборная погрешность $\Delta x_{\text{приб}} = 2\cdot\Delta x_{\text{пред}}/3$. Однако следует помнить, что на самом деле приборные ошибки являются не случайными, а систематическими, так что подобные оценки не являются обоснованными.

Для стрелочных электроизмерительных приборов принято указывать ***класс точности*** γ, записываемый в виде числа, например, γ=0,05 или γ=4,0. Это число дает ***предел допускаемой погрешности*** $\Delta x_{\text{пред}}$ прибора, выраженный в процентах от наибольшего значения величины, измеряемой в данном диапазоне прибора. Так, для вольтметра, работающего в диапазоне измерений 0 – 30 **В**, класс точности γ=1,0 определяет, что указанная погрешность в любом месте шкалы не превышает 0,3 **В**. Соответственно, среднеквадратичное отклонение $\Delta x_{\text{приб}}$ составляет 0,1 **В**.

Относительная погрешность результата, полученного с помощью этого вольтметра, зависит от значения измеряемого напряжения, становясь недопустимо высокой для малых напряжений. При измерении напряжения 0,5 **В** погрешность составит 20% . Как следствие, такой прибор не годится для исследования процессов, в которых напряжение меняется на 0,1 - 0,5 **В**.

Суммарная погрешность

Окончательный результат многократного измерения содержит в себе как случайную, так и приборную погрешности. Случайная погрешность уменьшается с увеличением количества отдельных измерений, а приборная погрешность не меняется, оставаясь в пределах $\pm \Delta x_{\text{пред}}/3$. При выполнении многократных измерений желательно получить столько отдельных измерений, сколько необходимо для выполнения соотношения

$(\Delta x)_{\text{случ}} << \Delta x_{\text{пред}}$

В таком случае погрешность окончательного результата будет целиком определяться лишь приборной погрешностью. Однако чаще встречается ситуация, когда случайная и приборная погрешности близки по значению, а поэтому обе влияют на окончательный результат. Тогда их необходимо учитывать совместно, и за суммарную погрешность принимают

$$\Delta x = \sqrt{\left(\Delta x_{\text{сл.ч}}\right)^2 + \left(\Delta x_{\text{приб}}\right)^2}\,. \qquad (4.7)$$

Поскольку случайную погрешность оценивают, как правило, с доверительной вероятностью **0,68** , а $\Delta x_{\text{пред}}$ - оценка ***предела допускаемой погрешности*** прибора, то можно считать, что выражение (4.7) задает доверительный интервал также с вероятностью, не меньшей 0,68. При выполнении однократного измерения оценкой погрешности результата служит $\Delta x = \Delta x_{\text{пред}}/3$, учитывающая только приборную погрешность.

Встречаются ситуации, когда случайную и приборную погрешности удается сравнить без вычислений $(\Delta x)_{\text{случ}}$. Это возможно, если результаты отдельных измерений не выходят за пределы допускаемой приборной погрешности:

$|x_{max} - x_{min}| \leq 2\Delta x_{\text{пред}}$,

где x_{min}, и x_{max} - наибольшее и наименьшее значения измеряемой величины. Повышение точности многократного измерения в таком случае невозможно, а погрешностью окончательного результата будет $\Delta x_{\text{пред}}/3$.

Учет погрешности в записи окончательного результата измерения

Завершением обработки данных многократного прямого измерения при заданной доверительной вероятности (вероятности охвата) являются три числа: ***результат измерения*** - среднее значение измеренной величины, найденное согласно (3.2), ***расширенная неопределенность*** (***случайная погрешность***, ***полуширина доверительного интервала***), оцениваемая с помощью (4.2), (4.6) и (4.7), и сама ***доверительная вероятность*** (***вероятность охвата, надежность*** результата). Эти числа представляют окончательный результат многократного измерения, и должны быть совместно записаны в ***стандартной форме***

$$x = \bar{x} \pm \Delta x, \quad \alpha = \ldots, \qquad (4.9)$$

которая содержит только ***достоверные***, т.е. надежно измеренные, цифры этих чисел.

Неверно полагать, что высокая точность вычислений при обработке данных приведет и к более точному результату измерения. Например, компьютер может выдать с десяток ненулевых цифр среднего и погрешности, но все ли они будут достоверными? Ведь обработка данных, какой бы сложной и трудоемкой она ни была, является вторичной по отношению к природе изучаемого объекта и процессу измерения. В окончательных числовых значениях это следует учитывать, что и делают путем их округления.

Необходимость округления это простое следствие неопределенности при оценивании окончательных результатов, находимых по данным эксперимента. Ограниченное количество измерений вносит неопределенность как в среднее значение, так и в погрешность. В математической статистике показано, что относительная погрешность оценивания величины $\sigma_{\bar{x}}$ составляет примерно $\delta\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\Delta\sigma_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} \approx \dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$, где $\boldsymbol{n}$ - количество используемых отдельных измерений. При $\boldsymbol{n}$~10 относительная погрешность оценивания $\sigma_{\bar{x}}$ будет достигать 30%, так что уже первая значащая цифра погрешности будет неточна. Понятно, что при этом теряет смысл приводить в погрешности лишние цифры, которые окажутся заведомо ненадежными. Однако, при выполнении промежуточных расчетов обязательно следует удерживать одну или две дополнительные цифры, чтобы уменьшить ошибки округления.

Порядок выполнения округления.

1. Выполнить предварительную запись окончательного результата измерения в виде $x = \bar{x} \pm \Delta x$ и вынести за общую скобку одинаковые порядки среднего и погрешности, т.е. множитель вида 10^k, где k - целое число. Числа в скобках переписать в десятичном виде с использованием запятой, убрав тем самым оставшиеся порядковые множители.

2. Округлить число в скобках, соответствующее погрешности: ***до одной значащей (ненулевой) цифры***, если эта цифра больше 2, или до двух первых значащих цифр в противном случае. При округлении используют правило: если цифра, расположенная за оставляемой, меньше 5, то она просто отбрасывается, если же она больше 5, то оставляемая цифра увеличивается на единицу. Если же отбрасываемая цифра *равна* 5, то наименьшая ошибка достигается при ***округлении по правилу Гаусса - до ближайшего четного числа***. К примеру, 4,5 округляется до 4, и то же время 3,5 также округляется до 4. А вот как округлять 0,456? Здесь надо делать так: сначала округляем 0,456 до 0,46; а затем 0,46 - до 0,5.

3. Округлить в скобках число, соответствующее среднему значению: последними справа оставляются цифры тех разрядов, которые сохранились в погрешности после ее округления.

Обратите внимание: ***сначала округляется погрешность***, а затем - соответствующим образом округляется результат измерения.

4. Окончательно записать $x = \bar{x} \pm \Delta x$ с учетом выполненных округлений. Общий порядок и единицы измерения величины приводятся за скобками - получится стандартная форма записи.

Примеры округления и записи окончательных результатов измерений в стандартной форме приведены в Табл.4.1.

Таблица 4.1

Запись окончательного результата измерения

Предварительная запись	Стандартная форма записи
$\boldsymbol{U} = (528{,}112 \pm 152{,}4)\cdot 10^1$ мВ	$\boldsymbol{U} = (5{,}3 \pm 1{,}5)\cdot 10^3$ мВ
$\boldsymbol{I} = (0{,}418 \pm 0{,}042)$ А	$\boldsymbol{I} = (0{,}42 \pm 0{,}04)$ А
$\boldsymbol{R} = (0{,}03643 \pm 0{,}00021)$ Ом	$\boldsymbol{R} = (36{,}43 \pm 0{,}21)\cdot 10^{-3}$ Ом
$\boldsymbol{f} = (125{,}3 \pm 41)$ Гц	$\boldsymbol{f} = (0{,}13 \pm 0{,}04)\cdot 10^3$ Гц
$\boldsymbol{t} = (8{,}72\cdot 10^2 \pm 30)\cdot 10^{-1}$ мс	$\boldsymbol{t} = (87 \pm 3)$ мс

В заключение раздела рассмотрим обработку результатов многократного прямого измерения высоты ***h***, которая будет использована в следующем разделе для определения ускорения свободного падения. Данные измерений помещены в табл.4.2. Отметим, что измерения проводились с помощью обычной матерчатой мерной ленты (рулетки) в условиях порывистого ветра, что привело к значительному разбросу результатов, как из-за растягивания ленты, так и вследствие влияния ветра. Получившийся разброс хорошо заметен в таблице.

Таблица 4.2

Результаты измерения высоты

i	h_i, м	$\Delta h_i = h_i - \bar{h}$, м	Δh_i^2 , м^2
1	28,30	-0,55	0,303
2	29,38	+0,53	0,281
3	28,60	-0,25	0,063
4	28,95	+0,10	0,010
5	29,90	+1,05	1,103
6	28,71	-0,14	0,020
7	28,17	-0,68	0,462
8	29,50	+0,65	0,423
9	28,66	-0,19	0,036
10	28,33	-0,52	0,270

После вычисления средней высоты $\bar{h} = \frac{\sum_i h_i}{10} = 28{,}85$ м заполняют два правых столбца таблицы и находят среднеквадратичное отклонение

$$\Delta h = \sqrt{\frac{\sum \Delta h_i^2}{10 \cdot 9}} = 0{,}18 \text{ м.}$$

Коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности α=0,68 и n=10 выполненных измерений: $t(0{,}68;10)$=1,1. Ширина доверительного интервала, которая служит оценкой случайной погрешности (неопределенности): **Δh**=1,1·0,18=0,20 м. Приборную погрешность при измерении длины оценивают как половину цены деления используемой мерной ленты (0,5 см), она составляет $\mathbf{\Delta h_{приб}}$ = 0,25 см = 0,0025 м. Это почти в 100 раз меньше случайной погрешности, поэтому приборную погрешность

$\Delta h_{приб}$ можно не учитывать при вычислении суммарной погрешности измерения.

Окончательный результат измерения высоты

$\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{28{,}85 \pm 0{,}20})$ м .

При этом отсутствие в записи окончательного результата доверительной вероятности (вероятности охвата) означает, что эта вероятность имеет стандартное значение 68%.

Контрольные вопросы

1. В чем главное отличие распределения случайной величины $\boldsymbol{x}$ от распределения случайной величины $\bar{x}$?
2. Какой смысл придают понятиям доверительной вероятности (вероятности охвата) и доверительного интервала ?
3. С какой целью в окончательный результат многократного измерения вводят коэффициент Стьюдента ?
4. Как количественно оценивают приборную погрешность ?
5. Каким образом находят суммарную погрешность окончательного результата измерения, учитывающую приборную погрешность ?
6. Перечислите правила округления и записи окончательного результата измерения в стандартной форме.

5. Погрешности косвенных измерений

В большинстве экспериментов используют ***косвенные измерения***. Исследуемую величину f определяют по результатам прямых измерений других физических величин, например, x, y, z,..., с которыми она связана заранее установленным математическим соотношением

$$f = f(x, y, z,\ldots) . \qquad (5.1)$$

Эта связь должна быть известна экспериментатору. Помимо результатов прямых измерений, параметрами (5.1) могут оказаться другие величины, точно заданные или полученные в других измерениях, - они составляют набор ***исходных данных***.

Выражение (5.1), записанное в явном виде, называют ***рабочей формулой***, и используют для оценивания как результата косвенного измерения $\bar{f}$, так и неопределенности результата измерения Δf. Естественно, обе оценки связаны с окончательными результатами прямых измерений $\bar{x} \pm \Delta x$, $\bar{y} \pm \Delta y$, $\bar{z} \pm \Delta z$, ... Обычно, чтобы получить (5.1), используют модельное описание, и, во избежание модельных погрешностей при измерении f, оно должно адекватно отражать исследуемое физическое явление. Если модель точна, то модельные погрешности исключены, а косвенное измерение даст надежные результаты.

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим случай, когда погрешности (неопределенности) измерения величин x, y, z,... носят только случайный характер и соответствуют нормальному закону распределения. Кроме этого, предполагаем, что погрешность каждого отдельно взятого прямого измерения независима от результатов других измерений, т.е. не подвержена воздействию случайных факторов, вызывающих погрешности других прямых измерений, выполненных в эксперименте. Такие измерения и сами измеряемые величины носят название ***статистически независимых***, или просто независимых. При выполнении указанных условий среднее значение величины f определяют на основе (5.1), исходя из средних значений величин x, y, z,... :

$$\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z},\ldots). \qquad (5.2)$$

Если точность прямых измерений достаточно высока, т.е. $\Delta x \ll |\bar{x}|$, $\Delta y \ll |\bar{y}|$, $\Delta z \ll |\bar{z}|$, то погрешности результатов прямых измерений переносятся на результат косвенного измерения как независимые нормальные распределения f вокруг среднего $\bar{f}$ по каждому из аргументов функции (5.1). Строгое обоснование этого утверждения можно найти в математической статистике. Погрешность измерения ***f*** вследствие малых случайных вариаций только величины ***x***: $\Delta f_x = f'_x \cdot \Delta x$,

только величины ***y***: $\Delta f_y = f'_y \cdot \Delta y$ (5.3)

только величины ***z***: $\Delta f_z = f'_z \cdot \Delta z$.

Здесь $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}, f'_z = \frac{\partial f}{\partial z}$, ... - частные производные функции ***f(x,y,z,...)*** по соответствующим переменным. Аргументами в вычисленных производных (5.3) служат оценки средних значений $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$.

Совместное распределение ***f*** вокруг среднего $\bar{f}$, которое учитывает отдельные распределения по каждому из аргументов (5.1), должно определять погрешность косвенного измерения ***Δf***. Эти распределения нормальны и независимы, поэтому, как доказано в математической статистике, дисперсия их совместного распределения равна сумме их дисперсий. Тогда среднеквадратичное отклонение совместного распределения, вычисляемое как корень из дисперсии, следует находить из выражения:

$$\Delta f = \sqrt{\Delta f_x^2 + \Delta f_y^2 + \Delta f_z^2 + \ldots} = \sqrt{\left(f'_x\right)^2 \Delta x^2 + \left(f'_y\right)^2 \Delta y^2 + \left(f'_z\right)^2 \Delta z^2 + \ldots} \quad (5.4)$$

Это выражение имеет общий характер и его можно использовать для определения погрешности косвенного измерения, выполненного при любой ***рабочей формуле f=f(x,y,z,...)***. Однако следует твердо помнить, что при непосредственных расчетах в (5.4) необходимо подставлять только погрешности ***Δx***, ***Δy***, ***Δz***, ..., найденные для одного и того же значения доверительной вероятности. Погрешность косвенного измерения также будет соответствовать этому значению доверительной вероятности. Рекомендуется использовать значение вероятности $\alpha = 0,68$.

Применим (5.4) к некоторым распространенным зависимостям. Интерес представляют те случаи, когда с помощью (5.4) удается установить функциональную связь между погрешностями прямых измерений и погрешностью косвенного измерения. Таблица 5.1 содержит выражения, задающие такую связь.

Таблица 5.1

Связь погрешностей прямых и косвенных измерений

Рабочая формула	Формула погрешности
$f = Ax + By + Cz$	$\Delta f = \sqrt{A^2\Delta x^2 + B^2\Delta y^2 + C^2\Delta z^2}$
$f = A\cdot x^{\alpha}\cdot y^{\beta}\cdot z^{\gamma}$	$\delta f = \sqrt{\alpha^2(\delta x)^2 + \beta^2(\delta y)^2 + \gamma^2(\delta z)^2}$
$f = \ln x$	$\Delta f = \dfrac{\Delta x}{x}$
$f = e^{x}$	$\delta f = \Delta x$
$f = A\sin\varphi$	$\Delta f = A\cos\varphi\cdot\Delta\varphi$

В таблице приняты следующие обозначения: Δ - для абсолютной погрешности, δ - для относительной погрешности, A, B, C, α, β, γ - постоянные, x, y, z, φ - результаты прямых измерений, f - результат косвенного измерения.

В качестве примера к рассмотренному материалу проведем обработку результатов эксперимента по измерению ускорения свободного падения g. В нем выполнено многократное прямое измерение времени падения t стального шарика с высоты h (двенадцатый этаж дома), которая также определена многократным прямым измерением (см. пример предыдущего раздела).

Экспериментальные результаты:

t = (2,43±0,11) с , h =(28,85±0,20) м .

Рабочая формула для определения g имеет вид $g = \dfrac{2h}{t^2}$.

Согласно (5.2)

$$\bar{g} = \frac{2\cdot 28{,}85}{2{,}43^2} = 9{,}77 \text{ м/с}^2 .$$

Поскольку производные вычисляются как

$$g'_h = \frac{2}{t^2},\quad g'_t = -\frac{4h}{t^3},$$

то согласно (5.4)

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2}\right)^2\Delta h^2 + \left(\frac{4h}{t^3}\right)^2\Delta t^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{2{,}43^2}\right)^2\cdot 0{,}11^2 + \left(\frac{4\cdot 28{,}85}{2{,}43^3}\right)^2\cdot 0{,}20^2} = 0{,}83 \text{ м/с}.$$

Чтобы не выполнять вычисление производных g'_h и g'_t , погрешность Δg можно было найти с помощью второй строки табл.5.1, так как рабочая формула может быть записана в виде **g=2 h^{-1} t^{-2}** . Тогда

$$\delta g^2 = (\delta h)^2 + 4\cdot(\delta t)^2 = (0{,}0069)^2 + 4\cdot(0{,}0453)^2 = 0{,}0083$$

$$\delta g = 0{,}091,\ \Delta g = g \cdot \delta g = 9{,}77 \cdot 0{,}091 = 0{,}89\ \text{м/с}^2\ .$$

После округления окончательный результат косвенного измерения в стандартной форме принимает вид:

$\boldsymbol{g} = (9{,}8 \pm 0{,}9)\ \text{м/с}^2$.

Из анализа погрешностей эксперимента видно, что основной вклад в $\boldsymbol{\Delta g}$ дает $\boldsymbol{\Delta t}$. Поэтому повышение точности измерения ускорения свободного падения возможно только после увеличения точности измерения времени падения шарика.

Контрольные вопросы

1. В чем основные различия прямого и косвенного измерения ?
2. Какова роль моделей при проведении косвенного измерения ?
3. Что можно утверждать о природе погрешности результата косвенного измерения, если соответствующие ему погрешности результатов прямых измерений распределены нормально ?
4. Напишите общее выражение, используемое для оценивания погрешности косвенного измерения.

6. Порядок действий при вычислении окончательных результатов прямых и косвенных измерений

Приводим детальную сводку операций, выполняемых при обработке результатов измерений разных типов. Содержание всех описываемых действий подробно рассмотрено в предыдущих разделах. Проводимые расчеты основываются на предположении о нормальном распределении погрешностей, когда систематические погрешности уже учтены на предыдущих этапах работы с экспериментальными данными.

Прямые многократные измерения

1. По результатам эксперимента вычислить среднее значение измеряемой величины. Использовать (3.2).
2. Найти стандартное отклонение результатов отдельных измерений от среднего. Использовать (3.4).
3. Отбросить измерения, в которых отклонение результатов от среднего значения превышает утроенное стандартное отклонение.

4. Повторить вычисления пунктов 1 и 2 для оставшихся результатов.

5. Оценить среднеквадратичное отклонение окончательного результата. Использовать (4.2).

6. Определить коэффициент Стьюдента для заданной доверительной вероятности (если преподавателем не задано рекомендуемое значение доверительной вероятности, то принять стандартное $\alpha = 0{,}68$) и вычислить границы доверительного интервала. Использовать (4.6).

7. Для вычисления полной погрешности окончательного результата учесть приборную погрешность. Использовать (4.7).

8. Записать окончательный результат в стандартной форме, предварительно проведя его округление.

Косвенные измерения

1. Рассчитать и записать в стандартной форме окончательные результаты прямых измерений величин, необходимых для нахождения искомой величины. Пользоваться доверительной вероятностью $\alpha = 0{,}68$.

2. На основании данных, полученных в пункте 1, и исходных данных найти среднее значение искомой величины. Использовать (5.2).

3. Вывести формулу для расчета погрешности результата косвенного измерения и вычислить значение погрешности. Использовать (5.4) или табл.5.1.

4. Привести окончательный результат косвенного измерения к стандартной форме записи.

7. Представление результатов измерений

В этом разделе рассмотрены вопросы, связанные с составлением таблиц и построением графиков - тем, что требуется на начальном этапе обработки данных измерений.

Таблицы

Для записи результатов большого количества однотипных измерений удобно использовать таблицы. Их использование позволяет избежать ненужной многократной записи обозначений измеряемых величин, единиц измерения, используемых множителей и т.п. В таблицы, помимо экспериментальных данных, помещают промежуточные результаты обработки этих данных.

Основные правила, которыми следует руководствоваться при построении таблиц.

1. **Форма таблицы** должна быть удобна для записи и обработки экспериментальных данных. Сначала следует решить, какие результаты измерений или расчетов будут помещены в таблицу. Затем определить количество столбцов и строк в таблице. После этого столбцы и строки таблицы вычерчивают карандашом по линейке.
2. **Нумеровать таблицы** принято в порядке их использования. Каждой таблице дают **краткое название**, соответствующее помещенным в нее данным.
3. **Первая строка таблицы** (самая верхняя) содержит **заголовки столбцов**, то есть, символьные обозначения физических величин, а также, через запятую, - единицы их измерения в СИ в русском написании. Если во всех результатах измерений в данном столбце присутствует общий десятичный множитель, его выносят в заголовок столбца, записывая общий множитель перед единицами измерения физической величины.
4. **Первый столбец таблицы**, как правило, отводят для записи порядкового номера измерения.

Таблица 7.1 иллюстрирует указанные правила.

В ней приведены результаты косвенных измерений удельного сопротивления $\boldsymbol{\rho}$ платины при разных температурах. Первые три столбца содержат результаты прямых измерений силы тока $\boldsymbol{I}$ через образец, напряжения $\boldsymbol{U}$ на нем и термоЭДС $\boldsymbol{V_T}$ термопары, служащей датчиком температуры $\boldsymbol{T}$. Температура $\boldsymbol{T}$ рассчитывалась при помощи специального градуировочного графика (косвенное измерение температуры).

Таблица 7.1

Температурная зависимость удельного сопротивления платиновой проволоки

№	I, мА	U, мВ	V_T, мВ	T, К	ρ, 10^{-7} Ом·м
1	1,0	2,78	0	293	1,02
2	1,0	2,83	0,20	298	1,04
…	…	…	…	…	…

Графики

Графики дают наглядное визуальное представление о связи между величинами. Это важно при интерпретации полученных данных, так как графическая информация легко воспринимается, вызывает больше доверия, обладает значительной емкостью. На основе графика легче сделать вывод о соответствии теоретических представлений данным эксперимента.

Рекомендации по построению графиков.

1. ***Выбор бумаги***. Графики строят только на бумаге, имеющей координатную сетку (обычная миллиметровка с линейным масштабом по осям или логарифмическая бумага). Логарифмическая бумага бывает двух типов - с логарифмическим масштабом по обеим осям, и с логарифмическим только по одной оси, и линейным - по другой.
2. ***Распределение осей***. Графики, за редким исключением, строят в прямоугольной системе координат, по горизонтальной оси (оси абсцисс) откладывают значения аргумента, независимую физическую величину; а по вертикальной оси (оси ординат) - значения функции, зависимой физической величины.
3. ***Выбор масштабов***. Обычно график строят по таблице экспериментальных данных. По таблице нужно определить интервалы изменения аргумента и функции. Их наибольшие значения определяют **масштабы** вдоль осей. Не обязательно на пересечении осей размещать точку (0,0). Масштабы по обеим осям выбирают независимо друг от друга.
4. ***Цена деления*** выбирается так, чтобы шкалы на осях легко читались. Одной клетке должно соответствовать кратное 10 количество единиц физической величины: 10^n, $2\cdot10^n$ или $5\cdot10^n$, где n - любое целое число, положительное или отрицательное. Так, числа 2; 0,5; 100; 0,02 - подходят, а числа 3; 7; 0,15 - не подходят для этой цели.
5. При необходимости для положительных и отрицательных значений по одной и той же оси могут быть выбраны разные масштабы, но только в том случае, если эти значения отличаются не менее чем на

порядок, т.е. в 10 раз и более. Примером может служить вольт-амперная характеристика диода, у которого прямой ток измеряется в миллиамперах, а обратный ток - в микроамперах.

6. ***Обозначение осей***. Координатные оси подписывают: ось абсцисс (горизонтальную) - справа внизу, ось ординат (вертикальную) - слева вверху. При этом у каждой оси указывают название (символьное обозначение) откладываемой величины, а через запятую – единицы ее измерения в СИ по-русски. Числовой масштаб выбирают в виде равноотстоящих по значению "круглых чисел", например: 2; 4; 6; 8 ... или 1,82; 1,84; 1,86 ... Десятичный множитель масштаба, как в таблицах, относится к единицам измерения, например, вместо 1000; 2000; 3000 ... получится 1; 2; 3 ... с общим множителем 10^3 , указанным перед единицей измерения.

7. ***Масштабные риски*** (деления шкалы) проставляют по осям на одинаковом расстоянии друг от друга, чтобы они выходили на поле графика. По оси абсцисс цифры масштаба пишут под рисками, по оси ординат - слева от рисок.

8. ***Нанесение точек.*** Экспериментальные точки аккуратно наносят на поле графика карандашом. Их всегда проставляют так, чтобы они были отчетливо различимы. Если в одних осях строят различные зависимости, полученные, например, при измененных условиях эксперимента или на разных этапах работы, то точки таких зависимостей должны отличаться друг от друга. Их следует отмечать разными значками (квадратами, кружками, крестиками и т.п.) или наносить карандашами разного цвета.

На рис.7.1 приведены точки экспериментальной зависимости, нанесенные на миллиметровку. Линия графика еще не нанесена.

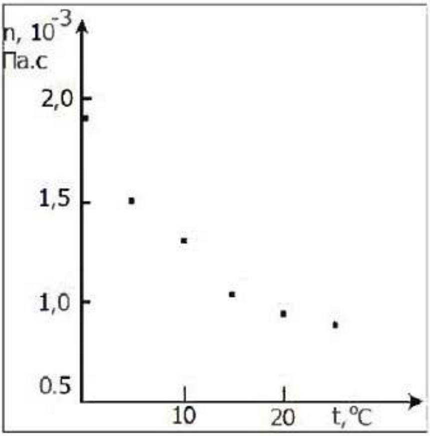


Рис.7.1. Зависимость коэффициента динамической вязкости воды от температуры.
Нанесены экспериментальные точки.
Не нанесена линия графика. Нет заголовка и номера графика.

Расчетные точки, полученные путем вычислений, размещают на поле графика равномерно. В отличие от экспериментальных, они должны слиться с теоретической кривой после ее построения. Расчетные точки, как и экспериментальные, наносят карандашом - при ошибке неверно поставленную точку легче стереть. Выносные координатные линии при нанесении точек не используют, для этих целей существует сетка миллиметровки, а лишние линии засоряют график, делая его неудобным для восприятия и работы с ним.

9. ***Проведение кривых***. По экспериментальным точкам с помощью карандаша проводят плавную кривую так, чтобы точки были приблизительно поровну расположены по обе стороны от проведенной кривой. Нет смысла стремиться провести кривую через каждую экспериментальную точку, ведь кривая является только интерпретацией результатов измерений, известных из эксперимента с погрешностью. По сути есть только экспериментальные точки, а кривая - произвольное, и не обязательно верное, домысливание эксперимента. Нельзя соединять все экспериментальные точки друг с другом прямыми, полученная ломаная линия не имеет ничего общего с истинной физической зависимостью! Форма такой ломаной линии не будет воспроизводиться при повторных сериях измерений.

На рис.7.2 приведены точки экспериментальной зависимости, нанесенные на миллиметровку. Линия графика уже проведена.

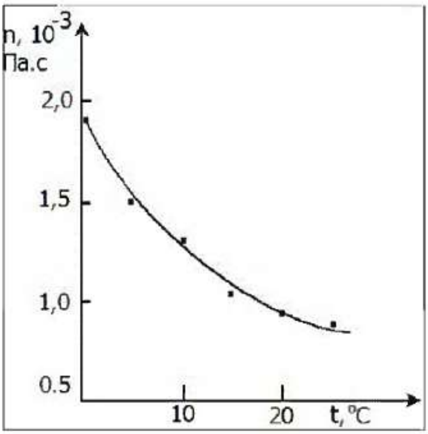


Рис.7.2. Зависимость коэффициента динамической вязкости воды от температуры.
Нанесены экспериментальные точки
и проведена линия графика.
Нет заголовка и номера графика.

Если известно математическое описание наблюдаемой зависимости, то теоретическая кривая проводится точно так же, но теоретическая кривая должна проходить по всем расчетным точкам, ведь теоретические значения координат точек могут быть вычислены сколь угодно точно.

Правильно построенная кривая должна заполнять **все поле графика**, что будет свидетельством правильного выбора масштабов по каждой из осей. Если же значительная часть поля оказывается незаполненной, то необходимо заново выбрать масштабы и перестроить зависимость.

10. ***Отображение погрешностей измерений на графике.*** Результаты измерений всегда содержат погрешности. Чтобы указать их значения на графике, используют два основных способа.

Первый упоминался при обсуждении вопроса выбора масштабов. Он состоит в выборе цены деления масштабной шкалы графика, равной погрешности откладываемой по данной оси величины. В таком случае точность измерений не требует дополнительных пояснений.

Если достичь соответствия погрешности и цены деления не удается, используют второй способ, заключающийся в прямом отображении погрешностей на поле графика. При этом через экспериментальную точку проводят два отрезка, параллельных осям абсцисс и ординат. В выбранном масштабе длина каждого отрезка должна равняться удвоенной погрешности величины, откладываемой по параллельной оси. Центр отрезка должен приходиться на экспериментальную точку. Вокруг точки образуются как бы "усы", задающие область возможных значений измеряемой величины. Погрешности становятся зримыми, хотя "усы" могут невольно засорить поле графика. Указанный способ чаще всего применяют, если погрешности меняются от измерения к измерению. Иллюстрацией способа служит рис.7.3.

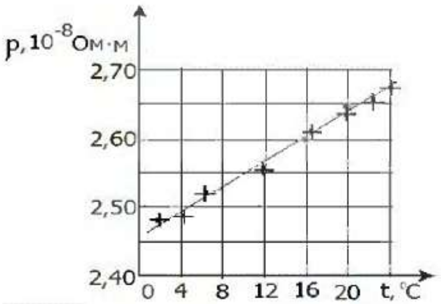


Рис.7.3. Зависимость удельного сопротивления алюминия от температуры.

11. ***Оформление графиков***. Графики ***нумеруют***, им дают ***названия***, кратко отражающие содержание построенных зависимостей. Все графические символы и обозначения, использованные при построении графика, поясняют в ***подписи к графику***, которую располагают ***под графиком*** или на части поля, не занятой кривой. На рис.7.4 приведен пример оформленного графика.

Правила оформления графиков в учебниках, научных публикациях, монографиях несколько отличаются от изложенных выше, что, в первую очередь, связано с их иллюстративным характером. Большинство таких графиков имеют смысл рисунков, так как на них часто не приводят масштабную сетку и масштабы по осям, не обозначают единицы измерения откладываемых величин. Отчасти это объясняется малыми размерами самих графиков, на которых просто не остается места для дополнительных надписей и линий.

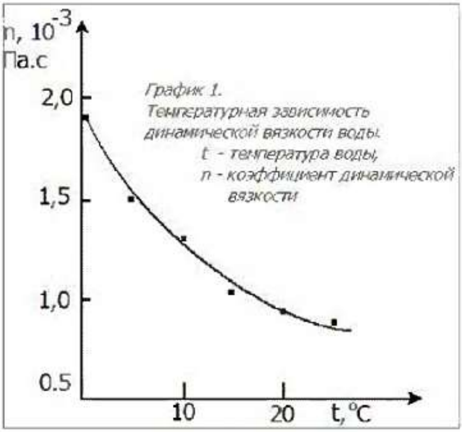


Рис.7.4. Зависимость коэффициента динамической вязкости воды от температуры.
Нанесены экспериментальные точки и проведена линия графика.
Указан номер графика и заголовок.
В подписи к графику поясняются использованные обозначения.

Работа с графиками

При помощи графиков исследуемых зависимостей часто удается провести достаточно полную обработку экспериментальных данных. Такая обработка всегда проста и наглядна, не требует сложных вычислений, и дает вполне приемлемые по точности результаты. Полезно начинать обработку любых данных с построения графиков и их интерпретации. Впоследствии можно воспользоваться более точными методами статистической обработки, но никакие математические ухищрения не составят конкуренции зримой достоверности графиков.

1. ***Считывание точек с графика***. Часто возникает необходимость найти из имеющегося графика значение функции $y(x)$, если задано значение аргумента x. Такое считывание точек требуется, например, при использовании градуировочных графиков термопар, расходомеров и т.п., которые строят на основании предварительных измерений или берут из справочников. Во всех этих случаях координата точки, определяемая из графика, имеет погрешность, сопоставимую с ценой наименьшего масштабного деления.

2. ***Экстремум экспериментальной кривой.*** При дискретных измерениях физической величины, т.е., измерениях при некоторых фиксированных значениях аргумента, исследуемая зависимость не может быть восстановлена полностью. Поэтому особенности кривой, проведенной по экспериментальным точкам, не могут быть выявлены абсолютно точно. Это, в первую очередь, относится к определению координат экстремумов - максимумов и минимумов кривых. Например, экспериментальная кривая на рис.7.5 может иметь форму, отмеченную как сплошной, так и штриховыми линиями.

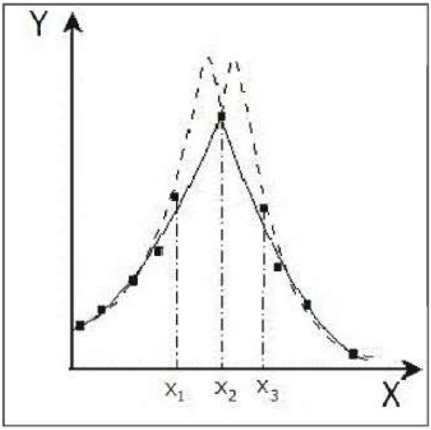


Рис.7.5 К определению положения экстремума на экспериментальной кривой

Однако график дает основание утверждать, что максимум находится на отрезке ($\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_3}$), поэтому его координату можно оценить как

$$x_{max} = \frac{x_1 + x_3}{2} \qquad (7.1)$$

а за оценку погрешности принять величину

$$\Delta x = \frac{x_3 - x_1}{2}. \qquad (7.2)$$

Чтобы уменьшить погрешность экспериментального определения координаты экстремума, в близкой к нему области следует выполнять измерения как можно чаще с минимально допустимым шагом изменения величины $\boldsymbol{x}$. Если оценка (7.2) оказывается меньше погрешности измерения величины $\boldsymbol{x}$, то именно погрешность измерения следует принимать за погрешность $\boldsymbol{\Delta x}$.

3. ***Проверка теоретических выводов***. Графическую проверку осуществляют на основе сравнения экспериментальной и теоретической кривых, совместно построенных на одном графике. Для корректности сравнения необходимо учитывать разброс точек экспериментальной кривой. С этой целью на графике по обе стороны от нее проводят

дополнительные кривые, симметричные относительно экспериментальной кривой (так называемый ***коридор ошибок***). Выполняя построение дополнительных кривых (границ ***коридора ошибок***), необходимо исходить из того, что между ними должна оказаться примерно половина всех экспериментальных точек. Теоретическая кривая, если она соответствует полученным данным, располагается в промежутке между границами коридора ошибок.

4. ***Графическое дифференцирование***.

Графическое дифференцирование может понадобиться, например, при вычислении дифференциального сопротивления диода. Вольт-амперная характеристика диода нелинейна, поэтому его сопротивление зависит от приложенного напряжения, называемого смещением. Понятие статического сопротивления (сопротивления по постоянному току $\boldsymbol{R = U/I}$) в данном случае лишено физического смысла, поэтому вводят дифференциальное сопротивление, находимое при заданном смещении путем дифференцирования экспериментальной вольт-амперной характеристики.

Поясним, как выполнить дифференцирование графически. Известно, что производная $\frac{dy}{dx}$ от функции $\boldsymbol{y(x)}$ равна угловому коэффициенту (тангенсу угла наклона) касательной к кривой $\boldsymbol{y(x)}$ в той же точке $\boldsymbol{x}$. Поэтому после построения графика экспериментальной зависимости для определения производной в некоторой точке достаточно в этой точке провести касательную к графику и вычислить ее угловой коэффициент. Конечно, метод весьма чувствителен к точности построения кривой и проведения касательной, и даже небольшая неточность, допущенная при вычерчивании, может привести к ощутимым ошибкам в производной. Это означает, что экспериментальную кривую следует строить очень тщательно.

5. ***Графическое интегрирование***. Определенный интеграл $\int_{x_1}^{x_2} y dx$ от неотрицательной функции $\boldsymbol{y(x)}$ представляет площадь плоской геометрической фигуры, ограниченной на графике вертикальной прямой $\boldsymbol{x=x_1}$ слева, параллельной ей прямой $\boldsymbol{x=x_2}$ справа, графиком $\boldsymbol{y(x)}$ сверху и осью абсцисс $\boldsymbol{y=0}$ снизу. Такой способ позволяет вычислить интеграл от любой экспериментально полученной зависимости. Площадь фигуры, дающая количественное значение интеграла, находят посредством подсчета составляющих ее клеток миллиметровки с последующим домножением результата подсчета на цену стороны клетки по каждой из двух осей.

Графическое дифференцирование и интегрирование дают неплохие по точности результаты, однако основная область их применения относится к качественному анализу исследуемых зависимостей.

Контрольные вопросы

1. Для чего нужны таблицы и как их строить ?
2. Что такое график ?
3. Как выбирается и наносится на график масштаб ?
4. Как следует проводить кривую по нанесенным на график экспериментальным точкам ? Почему ?
5. В чем достоинства графического представления результатов эксперимента?
6. Перечислите приемы графической обработки данных.

8. Оценивание параметров линейной зависимости

В эксперименте часто возникает необходимость проверить наличие линейной зависимости двух величин

$$y = ax + b\,, \qquad (8.1)$$

где x, y - измеряемые величины, a и b - параметры зависимости. Даже если из модельного описания непосредственно не следует линейная зависимость величин, теоретическую зависимость стремятся преобразовать к линейной. Объясняется это тем, что линейная зависимость выделяется из других форм функциональной связи двух величин. Во-первых, в силу психологических причин восприятие человека обладает свойством выделять прямые линии, как встречающиеся в повседневной жизни, так и построенные в виде графиков. Визуально удается достаточно точно восстановить из графика всю прямую, даже в той области, где информация о ней частично отсутствует. Это означает, что проводимая "на глаз" прямая, которая проходит по точкам, содержащим экспериментальный разброс, оказывается удивительно близкой к оптимальной, построенной с помощью методов математической статистики. Собственно, возможности статистики применительно к линейной зависимости определяют второе обстоятельство ее частого использования. Дело в том, что параметры линейной зависимости и их погрешности могут быть надежно оценены на основе метода, называемого методом наименьших квадратов. Ниже, помимо этого метода, рассмотрены варианты графической обработки и простой статистической обработки линейной зависимости методом парных точек.

Линеаризация зависимостей

В силу указанных выше причин экспериментатор должен стремиться свести нелинейную зависимость двух величин друг от друга к линейной, а затем обработать ее наилучшим образом. Как правило, многие функционально сложные зависимости допускают преобразование координат, приводящее к искомому результату. Примеры подобных преобразований помещены в табл. 8.1. В ней использованы следующие обозначения: ***v, u*** - преобразуемые функция и ее аргумент, ***y, x*** - новые функция и аргумент после преобразования.

По завершении обработки данных, то есть, после определения средних значений и погрешностей параметров преобразованной зависимости, полученные результаты используют для пересчета к первоначальным параметрам. Пересчет выполняют по правилам, используемым для обработки результатов косвенных измерений.

Таблица 8.1

Примеры линеаризации зависимостей

№ п/п	Вид нелинейной зависимости	Получаемая линейная зависимость	y	x	a	b
1	$v=k\,u^{z}$	$\ln v=z\ln u+\ln k$	$\ln v$	$\ln u$	z	$\ln k$
2	$v=k\,e^{zu}$	$\ln v=z\,u+\ln k$	$\ln v$	u	z	$\ln k$
3	$v=k\,e^{z/u}$	$\ln v=z\,u^{-1}+\ln k$	$\ln v$	u^{-1}	z	$\ln k$
4	$v=u/(k+zu)$	$v^{-1}=k\,u^{-1}+z$	v^{-1}	u^{-1}	k	z

Определение параметров линейной зависимости из графика

После нанесения на график экспериментальных точек по ним "на глаз" проводят прямую. Строят ее таким образом, чтобы точки в среднем одинаково располагались по обе стороны от прямой.

На рис. 8.1 это прямая 1-2. На ней выбирают две точки (1 и 2), максимально удаленные друг от друга. Их координаты x_1, y_1 и x_2, y_2 подставляют в (8.1) для получения двух уравнений для неизвестных параметров линейной зависимости a и b:

$$y_1=ax_1+b,$$

$$y_2=ax_2+b,$$

из которых находят параметры:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \quad \text{и} \qquad b=\frac{y_2x_1-y_1x_2}{x_1-x_2} \qquad (8.2)$$

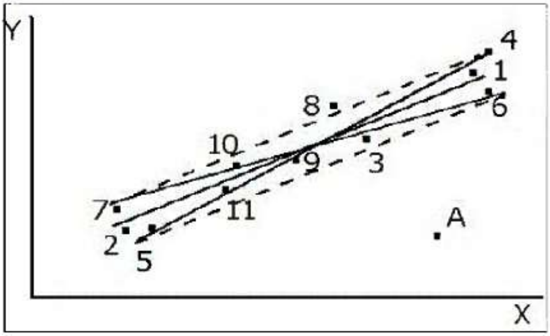


Рис. 8.1 Графическая обработка линейной зависимости

Для оценивания погрешностей Δa и Δb строят коридор ошибок. На рис. 8.1 границы коридора, симметричные относительно основной прямой 1-2, изображены пунктиром.

Экспериментальные точки в основном располагаются внутри коридора. Если на графике имеются точки, которые отстоят от основной прямой 1-2 более, чем на утроенное среднее расстояние точек до прямой (это хорошо заметно уже при рассматривании графика – на рис.8.1 такой точкой является точка ***A***), то их отбрасывают и не используют при построении границ коридора ошибок (так называемое правило трех стандартов). Соответствующие измерения, скорее всего, содержат грубые ошибки - промахи.

Исследуемая линейная зависимость находится внутри коридора ошибок. Предельные случаи хода этой зависимости получатся, если провести прямые через противоположные углы коридора (прямые 4-5 и 6-7). Тем же способом, что и для основной прямой 1-2, находят параметры этих предельных прямых a_1, b_1 и a_2, b_2. И за оценку погрешностей параметров линейной зависимости принимают величины:

$$\Delta a = \frac{|a_1 - a_2|}{2}, \qquad \Delta b = \frac{|b_1 - b_2|}{2}. \qquad (8.3)$$

Может оказаться, что теоретическую зависимость между измеряемыми величинами предполагают линейной, а экспериментальные точки явно не ложатся на прямую. Проведение по ним прямой, как это сделано на рис.8.2, неправомерно. Расхождение между теоретической и экспериментальной зависимостями свидетельствует о наличии систематических погрешностей, которые должны быть выявлены и учтены при обработке результатов. Иначе экспериментатору остается только констатировать расхождение модели с экспериментом.

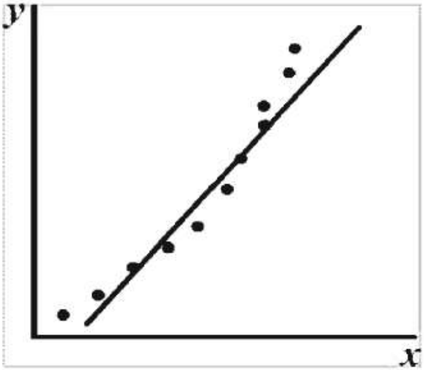


Рис.8.2 Пример необоснованной интерпретации экспериментальной зависимости как линейной

Часто линейная зависимость является приближенно справедливой в ограниченном интервале изменения физических величин. В таком случае необходимо определить границы применимости линейной зависимости и указать их при анализе результатов эксперимента.

Метод парных точек

В некоторых физических экспериментах основной интерес представляет только угловой коэффициент линейной зависимости (8.1). Для оценивания значения коэффициента и определения его погрешности удобен ***метод парных точек***. Он заключается в следующем.

После нанесения на график экспериментальных точек из них выбирают пары, в которых точки отстоят друг от друга **примерно на одинаковое расстояние**. Желательно, чтобы это расстояние было **максимально возможным**. Через каждую пару проводят прямую, а затем согласно (8.2) вычисляют угловые коэффициенты всех прямых. Из получившегося набора коэффициентов по правилам обработки данных прямых измерений определяют среднее значение коэффициента и его погрешность. Их принимают за результат измерения искомого параметра зависимости (8.1).

Рассмотрим пример конкретной обработки данных эксперимента по измерению сопротивления $\boldsymbol{R}$ участка электрической цепи. Измеренные значения тока $\boldsymbol{I}$ и соответствующие им значения падения напряжения $\boldsymbol{U}$ приведены в табл.8.2.

Таблица 8.2

Падение напряжения в зависимости от силы тока

№ п/п	I, мА	U, В
1	13,2	11,07
2	16,9	19,09
3	25,3	28,94
4	44,3	36,03
5	46,1	46,88
6	62,7	57,31
7	70,0	67,59
8	81,1	76,91

Теоретическое описание исследуемой зависимости дает закон Ома $U = R \cdot I$, где сопротивление R является угловым коэффициентом прямой, проходящей через начало координат. Значит, для его определения можно воспользоваться методом парных точек.

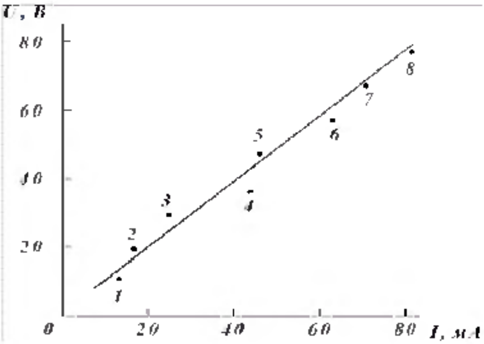


Рис.8.3 Зависимость падения напряжения от тока в цепи

Проставим экспериментальные точки на графике (рис.8.3) и пронумеруем их от 1 до 8. Выберем пары точек 1-5, 2-6, 3-7, 4-8 и занесем их координаты в табл. 8.3, которую используем для проведения обработки данных методом парных точек.

Таблица 8.3

Обработка данных методом парных точек

Пары точек	ΔI, мА	ΔU, В	$R=\frac{\Delta U}{\Delta I}$, Ом	$R-\overline{R}$, Ом	$\left(R-\overline{R}\right)^2$, 10^3 Ом^2
1-5	32,9	35,81	1088	113	12,8
2-6	45,8	38,22	834	-141	19,9
3-7	44,7	38,65	865	-110	12,1
4-8	36,8	40,88	1111	136	18,5

Среднее значение сопротивления, определенное методом парных точек, оказывается здесь равно $\overline{R}=975$ Ом. Можно определить погрешность этого значения. По формуле (4.2) определим среднеквадратичное отклонение вычисленного среднего значения :

$$\sum\left(R-\overline{R}\right)^2=63{,}3\cdot10^3\ \text{Ом}^2,\quad \sigma_{\overline{R}}=\sqrt{\frac{\sum\left(R-\overline{R}\right)^2}{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{63{,}3\cdot10^3}{4\cdot3}}=72{,}6\ \text{Ом}.$$

Здесь n=4, и, если задаться ***доверительной вероятностью*** α=68%, то для определения ширины ***доверительного интервала***, в котором с такой вероятностью окажется измеренное значение сопротивления, потребуется найти ***коэффициент Стьюдента*** $t(0{,}68;\ 4)$. Согласно табл.2 Приложения 1 его значение равно $t(0{,}68;4)$=1,3. Погрешность (расширенную неопределенность) находим по формуле $\Delta R=t(0{,}68;4)\cdot\sigma_{\overline{R}}=1{,}3\cdot72{,}6=94{,}4$ Ом. Округляя, получаем окончательный результат в виде R=(0,98±0,09)·10^3 Ом.

Точность измерения сопротивления невелика, что свидетельствует о наличии значительных экспериментальных погрешностей.

Метод наименьших квадратов

Этот метод является одним из наиболее распространенных приемов статистической обработки экспериментальных данных, относящихся к различным функциональным зависимостям физических величин друг от друга.

Пусть экспериментально ***снята зависимость*** $y(x)$, то есть проведено n парных ***одновременных*** измерений величин x и y, получены соответствующие значения x_i, y_i (i=1,...,n). И теперь мы хотим найти параметры a и b линейной зависимости $y = ax + b$, а также оценить их неопределенности σ_a и σ_b.

В ***методе наименьших квадратов*** (**МНК**) требуется, чтобы сумма квадратов отклонений измеренных значений y_i от их расчетных значений была минимальна, то есть

$$S = \sum \left(y_i - (ax_i + b) \right)^2 = \min . \qquad (8.3)$$

Из условия минимума следуют формулы для вычисления параметров a и b

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x^2}, \quad b = \overline{y} - a \cdot \overline{x}, \qquad (8.4)$$

причем черточками обозначены средние значения

$$\begin{gathered} \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i; \ \overline{y} = \frac{1}{n} \sum_i y_i \\ \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2; \ \overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_i y_i^2; \ \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_i x_i y_i \end{gathered} \qquad (8.5)$$

и использованы обозначения

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2, \quad \sigma_y^2 = \overline{y^2} - (\overline{y})^2, \qquad (8.6)$$

Если предположить, что значения x_i известны точно, то погрешности σ_a и σ_b определения параметров линейной зависимости методом наименьших квадратов находятся по формулам

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n-2} \left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} - a^2 \right)}; \quad \sigma_b = \sigma_a \cdot \sqrt{\overline{x^2}} . \qquad (8.7)$$

Многие прикладные компьютерные программы содержат метод наименьших квадратов, строят графики и автоматически обрабатывают их для определения оценок параметров и их погрешностей.

Применим формулы (8.4-8.7) метода наименьших квадратов к обработке данных по зависимости напряжения от силы тока, содержащихся в табл. 8.2. При обработке удобно располагать результаты в виде таблицы.

Таблица 8.4.

Обработка данных методом наименьших квадратов

№ п/п	I, мА	I^2, мА^2	U, В	U^2, В^2	IU,В·мА
1	13,2	174,2	11,07	122,5	146,1
2	16,9	285,6	19,09	364,4	322,6
3	25,3	640,1	28,94	837,5	732,2
4	44,3	1962,5	36,03	1298,2	1596,1
5	46,1	2125,2	46,88	2197,7	2161,2
6	62,7	3931,3	57,31	3284,4	3593,3
7	70,0	4900,0	67,59	4568,4	4731,1
8	81,1	6577,2	76,91	5915,1	6237,4
Средние	$\overline{I}=44{,}95$	$\overline{I^2}=2575$	$\overline{U}=42{,}98$	$\overline{U^2}=2324$	$\overline{IU}=2440$

Отсюда получим:

$\sigma_I^2=\overline{I^2}-(\overline{I})^2=554{,}5$ мА^2, $\sigma_U^2=\overline{U^2}-(\overline{U})^2=476{,}7$ В^2

$$a=R=\frac{\overline{IU}-\overline{I}\cdot\overline{U}}{\sigma_I^2}=0{,}916\ \text{В/мА}=916\ \text{Ом}$$

$$\sigma_a=\sigma_R=\sqrt{\frac{1}{n-2}\left(\frac{\sigma_U^2}{\sigma_I^2}-R^2\right)}=\sqrt{\frac{1}{6}(0{,}8597-0{,}8390)}=0{,}059\ \text{В/мА}=59\ \text{Ом}.$$

Число измерений равно n=8, поэтому нам потребуется коэффициент Стьюдента t(0,68; 8)=1,1 (см. Таблицу коэффициентов Стьюдента). Расширенная неопределенность (погрешность) результата измерения равна

$\Delta R=t(0{,}68;\ 8)\cdot\sigma_R=59\cdot1{,}1=65$ Ом

Округляя, получаем сопротивление равным R=(0,92±0,06) 10^3 Ом.

Сравнивая результаты метода парных точек и метода наименьших квадратов, видим достаточно хорошее совпадение этих результатов.

Контрольные вопросы

1. Какие свойства естественным образом выделяют линейную зависимость физических величин?
2. В чем смысл линеаризации экспериментальных зависимостей?
3. Опишите последовательность действий при графической обработке линейной зависимости.
4. Что такое метод парных точек? Как его применить на практике?
5. Какую модель использует метод наименьших квадратов и как она связана с его названием? Каков алгоритм метода?

Литература

1. Зайдель А.Н. Элементарные оценки ошибок измерений.- Л.: "Наука", 1967.
2. Кассандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений.- М.: "Наука", 1970.
3. Измерительные приборы физической лаборатории /сост. Козлов М.М., Целищева Н.С. .- Л.: ЛПИ, 1984.
4. Гришин В.К. Статистические методы анализа и планирования экспериментов. - М.: МГУ,1975.
5. Сквайрс Дж. Практическая физика.- М.: "Мир", 1971.
6. Худсон Д. Статистика для физиков.- М.: "Мир", 1967.
7. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке.- М.: "Мир", 1980.
8. Агекян Т. А. Теория ошибок для астрономов и физиков.- М.: "Наука", 1968.
9. Яворский В.А. Планирование научного эксперимента и обработка экспериментальных данных.- М.: МФТИ, 2006.
10. Обработка экспериментальных данных /Агапьев Б.Д., Белов В.Н., Кесаманлы Ф.П., Козловский В.В., Марков С.И.: Учебное пособие. 84 с. - СПб: СПбГТУ, 1999 г.

Авторы выражают признательность всем сотрудникам кафедры Экспериментальной физики СПбГПУ, оказавшим содействие и помощь в работе над настоящим пособием.

Особую благодарность авторы хотели бы выразить С.А. Старовойтову, взявшему на себя непростой труд прочитать авторскую рукопись, за конструктивные замечания и деловую критику, советы и искреннюю поддержку.

Приложение 1
Таблицы значений статистических величин

Таблица 1. Нормальное распределение.

Доверительные интервалы $\left[\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x\right]$ для доверительной вероятности α (в долях $\varepsilon = \dfrac{\Delta x}{\sigma}$)

α	0,68	0,90	0,95	0,990	0,997	0,999
ε	1,0	1,65	2,0	2,6	3,0	3,3

Таблица 2. Распределение Стьюдента.

Коэффициенты Стьюдента $t(\alpha, n)$ для доверительной вероятности α при числе измерений n .

	α				
n	0,68	0,90	0,95	0,99	0,999
2	2,0	6,3	12,7	63,7	636,6
3	1,4	2,9	4,3	9,9	31,6
4	1,3	2,4	3,2	5,8	12,9
5	1,2	2,1	2,8	4,6	8,6
6	1,2	2,0	2,6	4,0	6,9
7	1,1	1,9	2,4	3,7	6,0
8	1,1	1,9	2,4	3,5	5,4
9	1,1	1,9	2,3	3,4	5,0
10	1,1	1,8	2,3	3,3	4,8
15	1,1	1,8	2,1	3,0	4,1
20	1,1	1,7	2,1	2,9	3,9
30	1,1	1,7	2,0	2,8	3,7
50	1,1	1,7	2,0	2,7	3,5
100	1,0	1,7	2,0	2,6	3,4

Приложение 2

Протокол-отчет и работа с ним

Протокол-отчет является основным документом, который позволяет представить результаты проделанной лабораторной работы в законченном виде. По нему преподаватель контролирует и оценивает правильность выполнения работы как в плане ее экспериментальной части, так и в части записи, обработки и анализа полученных результатов. При самостоятельной подготовке к предстоящей работе протокол-отчет дает возможность заранее обдумать последовательность конкретных действий, необходимых для успешного проведения работы в лаборатории, рационально организовать измерения, правильно записать данные лабораторного эксперимента, а также осмысленно осуществить их последующую обработку и анализ. Указанная ниже форма протокола-отчета обязательна для студентов всех факультетов. Он содержит следующие пункты, заполняемые по мере подготовки и выполнения лабораторной работы.

1. Цель работы.
2. Задачи, решаемые при выполнении работы.
3. Объект исследования.
4. Метод экспериментального исследования.
5. Рабочие формулы и исходные данные.
6. Таблица измерительных приборов.
7. Схема экспериментальной установки (оформить как Приложение 1 к протоколу-отчету).
8. Результаты прямых измерений и их обработка (таблицы, примеры расчетов средних величин и погрешностей).
9. Расчет результатов косвенных измерений (таблицы, примеры расчетов).
10. Расчет погрешностей косвенных измерений (таблицы, примеры расчетов).
11. Графики экспериментальных зависимостей (оформить как Приложение 2 к протоколу-отчету).
12. Окончательные результаты.
13. Выводы и анализ результатов работы.
14. Дополнительные задания.
15. Выполнение дополнительных заданий.
16. Замечания преподавателя.

Для протокола-отчета используют стандартный печатный бланк или двойной тетрадный лист, оформленный по образцу бланка, имеющегося в лаборатории. Листы с рисунками, графиками, необходимые дополнительные листы вкладывают в протокол-отчет. Их размеры не должны превышать размеры самого протокола-отчета.

Пункты 1-5 протокола-отчета заполняют ***до занятия*** в ходе домашней подготовки к лабораторному занятию, после ознакомления с описанием к работе, в котором изложено содержание предстоящего исследования. Полезно запомнить требования к оформлению протокола-отчета.

Пункт 1 «**Цель работы**» предполагает точную формулировку ожидаемого результата, который должен быть получен по выполнении лабораторной работы, например, «значение», «зависимость», «закон» и т.д. Как правило, цель работы отражена в названии самой лабораторной работы. Например. Цель работы: значение постоянной Больцмана.

Пункт 2 «**Задачи, решаемые при выполнении работы**» предназначен для указания конкретных заданий в работе и может быть заполнен в виде перечня, задающего последовательность действий для достижения цели работы (ожидаемого результата).

Пункт 3 «**Объект исследования**» нужен для того, чтобы дать конкретную характеристику материальному объекту, который исследуется в лабораторной работе, например, воздух, полупроводниковый диод, металлический стержень, электромагнитное излучение и т.д.

Поскольку для проведения физического исследования объекта выбран конкретный экспериментальный метод, реализованный в лабораторной установке, его кратко формулируют в пункте 4 «**Метод экспериментального исследования**». Здесь же следует указать физическое явление, на котором он основан. Дополнением к этому служит пункт 7 «**Схема экспериментальной установки**» с рисунками блок-схемы экспериментальной установки и используемых электрических или оптических схем. Их вычерчивают карандашом на отдельных листах, снабжая краткими пояснениями, чтобы не дублировать описание. В пояснении к схеме, приводимом в пункте 7, желательно обозначить объект исследования, устройства, позволяющие менять в эксперименте исследуемые свойства объекта, и устройства, дающие возможность проводить необходимые измерения.

Пункт 5 «**Рабочие формулы и исходные данные**» должен содержать необходимые для получения окончательных результатов формулы, включая формулы для расчета погрешностей косвенных измерений, называемые рабочими формулами. Все величины, используемые в рабочих формулах, должны быть пояснены, например, $U_{эб}$ – напряжение в цепи эмиттер-база транзистора, L – длина катода электровакуумного диода и т.п. Кроме того, в этом пункте записывают все заданные значения величин, используемых при расчетах, например, геометрические размеры, сопротивления резисторов, значения физических постоянных и т.п., а также приводят табличные значения измеряемых величин, если они известны, например, значение постоянной Больцмана.

Последнее, что необходимо сделать при подготовке к работе - начертить таблицы для записи экспериментальных результатов, заносимых в пункт 8 «**Результаты прямых измерений и их обработка**». Общие правила оформления таблиц изложены в тексте пособия.

Заполнение пункта 6 производится по завершении лабораторных измерений. В таблицу «**Измерительные приборы**» пункта 6 заносят характеристики измерительных приборов, но только тех, с помощью которых непосредственно проводят измерения. Источники питания, приборы-индикаторы, комплектующие лабораторных установок здесь не указывают. В качестве предела, или диапазона, для каждого измерительного прибора приводят только те шкалы (диапазоны), в которых проводят измерения при выполнении лабораторной работы. У прибора может быть несколько диапазонов, но для вычисления приборных погрешностей требуется знать лишь те, которые использовали для измерений.

Пункты протокола-отчета 8 - 10 связаны с записью и последующей обработкой результатов прямых измерений. Не следует забывать, что протокол-отчет предназначен для работы с ним и носит название ***рабочего***. Поэтому данные заносят в него ***без использования ненужных черновиков***. Если в записях возникают ошибки, ошибочные данные зачеркивают, а рядом делают исправления. Данные измерений заносят в таблицы, которые одновременно могут включать в себя результаты обработки. Чтобы не повторять в протоколе-отчете множественные однотипные расчеты, достаточно (и необходимо) привести один пример численной подстановки данных (например, из какой-либо строки таблицы) в рабочую формулу. Только на основании такого примера преподаватель может найти ошибки в расчетах, если они были допущены, и помочь их исправить. Это требование также относится к расчету погрешностей. В пунктах 9,10 проводят вычисления результатов косвенных измерений и их погрешностей. Здесь, как и в пункте 8, следует обязательно привести примеры расчетов, записываемые по следующей схеме: рабочая формула в алгебраическом виде - рабочая формула с подставленными значениями всех входящих в нее величин - результат вычислений.

Важным приложением к протоколу-отчету служат графики экспериментальных зависимостей (пункт 11). Их строят на миллиметровой бумаге с соблюдением общих требований, изложенных в тексте пособия. В пункт 11 заносят перечень всех построенных графиков, обязательно указывая номер графика и его название.

Пункт 12 отчета содержит окончательные результаты. Здесь размещают экспериментальные данные, которые получены при выполнении поставленных задач работы. Завершает протокол-отчет пункт 13 «**Выводы и анализ результатов работы**», посвященный анализу окончательных результатов и выводам. Если возможно, полученные результаты сравнивают с табличными значениями исследованных величин, оценивают расхождения, дают физические объяснения экспериментально обнаруженным фактам и зарегистрированным зависимостям физических величин.

Пункты 14-15 необходимы при выполнении дополнительных заданий к работе, которые может дать преподаватель. Пункт 16 заполняет преподаватель, если в представленном отчете выявлены ошибки. Их исправление проводят в тексте или с использованием дополнительных листов, вкладываемых в протокол-отчет.

Ниже приведен пример оформления протокола-отчета, который поможет разобраться в изложенных здесь рекомендациях.

Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет
Кафедра Экспериментальной физики

Группа:	2012/1	К работе допущен:
Студент:	Бирюкова М.П.	Работа выполнена:
Преподаватель:	Коликова В.М.	Отчет принят:

Рабочий протокол и отчет
по лабораторной работе № 1.04
Вынужденные поперечные колебания стального стержня

1. ***Цель работы***: значение модуля Юнга стали.

2. ***Задачи, решаемые при выполнении работы***.
   1. Снять резонансную кривую стального стержня.
   2. Измерить его первую собственную частоту.
   3. По результатам измерений определить модуль Юнга материала стержня.

3. ***Объект исследования***: стальной стержень, лежащий на опорах и совершающий колебания под действием переменного магнитного поля.

4. ***Метод экспериментального исследования***: измерение собственной (резонансной) частоты колебаний стержня.

5. ***Рабочие формулы и исходные данные***.

$$\boxed{f_n = \frac{\pi \cdot D \cdot n^2}{8L^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

$\boldsymbol{n} = 1$; $\boldsymbol{f_1} = \boldsymbol{f_p}$; $\boldsymbol{L} = 314 \pm 1$ мм;

$$\boxed{E = \frac{64L^4 \rho f_p^2}{\pi^2 D^2 n^4}}$$

$\boldsymbol{\rho} = 7{,}85 \cdot 10^3$ кг/м^3; $\boldsymbol{E}_{\text{табл}} = 200 \cdot 10^9$ Па

$$\boxed{\delta E = \sqrt{(4\delta L)^2 + (\delta\rho)^2 + (2\delta f_p)^2 + (2\delta D)^2}}$$

Используемые обозначения: $\boldsymbol{f_n}$ - резонансная частота, $\boldsymbol{L}$ - длина стержня, $\boldsymbol{\rho}$ - плотность материала стержня, $\boldsymbol{E}$ – модуль Юнга материала стержня, $\boldsymbol{n}$ = 1,2,3,… - номер собственной частоты, $\boldsymbol{E}_{\text{табл}}$ - табличное значение модуля Юнга.

6. ***Измерительные приборы***.

Таблица

№ п/п	Наименование	Тип прибора	Используемый диапазон	Погрешность прибора
1	Микрометр	стандартный	0 – 25 мм	0,005 мм
2	Частотомер-хронометр	Ф5080	0 – 10^6 Гц	0,1 Гц
3	Милливольтметр	В3-38А	0 – 30 мВ	0,3 мВ

7. *<u>Схема установки</u>* для измерения модуля Юнга стали резонансным методом: см. Приложение 1.

8. *<u>Результаты прямых измерений и их обработка</u>*.

Таблица 1

Многократное измерение диаметра стержня

№ п/п	D, мм	$D-\overline{D}$, мм	$\left(D-\overline{D}\right)^2$, мм²
1	8,16	0,075	0,00562
2	8,05	-0,035	0,00122
3	8,12	0,035	0,00122
4	8,08	-0,005	0,00002
5	8,03	-0,055	0,00030
6	8,07	-0,015	0,00022

$\overline{D} = 8{,}085$ мм $\qquad \sum\left(D-\overline{D}\right)^2 = 0{,}0086$ мм²

Теоретическое оценивание первой резонансной частоты колебания f_p с целью определения диапазона частот, в котором следует искать резонанс.

$$f_1 = \frac{\pi \cdot D \cdot 1}{8 \cdot L^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{3{,}14 \cdot 8{,}05 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 0{,}314^2}\sqrt{\frac{200 \cdot 10^9}{7{,}85 \cdot 10^3}} \cong 162 \text{ Гц}$$

Таблица 2

Многократное измерение первой собственной частоты колебаний стержня

№ п/п	f_p, Гц	$f_p - \bar{f}_p$, Гц	$\left(f_p - \bar{f}_p\right)^2$, Гц²
1	160,7	0	0
2	160,7	0	0
3	160,6	-0,1	0,01
4	160,6	-0,1	0,01
5	160,8	0,1	0,01
6	160,8	0,1	0,01

$\bar{f}_p = 160{,}70$ Гц $\qquad \sum\left(f_p - \bar{f}_p\right)^2 = 0{,}04$ Гц²

Таблица 3

Зависимость амплитуды колебаний стального стержня от частоты изменения индукции магнитного поля

№ п/п	U, мВ	f, Гц	U/U_{max}, отн.ед.
1	15,0	161,0	1,00
2	10,0	158,9	0,67
3	5,0	156,6	0,33
4	3,0	152,8	0,20
5	2,0	145,1	0,13
6	1,0	103,1	0,07
7	0,9	84,9	0,06
8	14,0	160,5	0,93
9	8,0	162,6	0,53
10	4,0	164,4	0,27
11	2,5	169,0	0,17
12	0,8	177,2	0,05
13	0,9	192,7	0,06

Вычисление среднеквадратичного отклонения диаметра стержня (см. табл.1).

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N=6}\left(D_i - \overline{D}\right)^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{0{,}0086}{30}} = 0{,}017 \text{ мм}$$

Вычисление среднеквадратичного отклонения резонансной частоты (см. табл.2).

$$\boxed{\sigma_{fp} = \sqrt{\frac{\sum_{i-1}^{6}\left(fp_i - fp_{cp}\right)^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{0.04}{30}} = 0.037} \text{ Гц}$$

Вычисление абсолютной погрешности измерения диаметра стержня для доверительной вероятности $\alpha = 0{,}68$ и $N = 6$.

Коэффициент Стьюдента: $t(0{,}68;6) = 1{,}2$

Случайная погрешность: $\Delta D_{случ} = 1{,}2 \cdot 0{,}017 = 0{,}02$ мм

Приборная погрешность: $\Delta D_{приб} = 0{,}005$ мм

Так как $\Delta D_{приб} < \Delta D_{случ}/3$, то абсолютная погрешность: $\Delta D \cong \Delta D_{случ} = 0{,}02$ мм

Значение диаметра стержня: $D = (8{,}08 \pm 0{,}02)$ мм

Вычисление абсолютной погрешности измерения резонансной частоты для доверительной вероятности $\alpha = 0{,}68$ и $N = 6$.

Коэффициент Стьюдента: $t(0{,}68;6) = 1{,}2$

Случайная погрешность: $\Delta f_{p(случ)} = 1{,}2 \cdot 0{,}037 = 0{,}044$ Гц

Приборная погрешность: $\Delta f_{p(приб)}) = 0{,}1$ Гц

Абсолютная погрешность:

$$\Delta f_p = \sqrt{\left(\Delta f_{p(случ)}\right)^2 + \left(\Delta f_{p(приб)}\right)^2} = \sqrt{0{,}044^2 + 0{,}1^2} = \sqrt{0{,}012} = 0{,}11 \text{ Гц}$$

Значение резонансной частоты: $f_p = (160{,}70 \pm 0{,}11)$ Гц

9. _Расчет результата косвенного измерения модуля Юнга_.

$$\boxed{\overline{E} = \frac{64 \cdot f_p^2 \cdot L^4 \rho}{\pi^2 D^2} = \frac{7850 \cdot 64 \cdot 160{,}7^2 \cdot 0{,}314^2}{3{,}14^2 \cdot \left(8{,}08 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 1{,}96 \cdot 10^{11}} \text{ Па.}$$

10. Расчет погрешности измерения модуля Юнга.

$$\boxed{4\delta L = 4\frac{\Delta L}{L} = 4\frac{1}{314} = 1{,}2 \cdot 10^{-2}},$$

$$\boxed{2\delta f_p = 2\frac{\Delta f_p}{f_p} = 2\frac{0{,}11}{160{,}7} = 0{,}14 \cdot 10^{-2}}.$$

$$\boxed{2\delta D = 2\frac{\Delta D}{D} = 2\frac{0{,}02}{8{,}08} = 0{,}49 \cdot 10^{-2}}$$

$$\boxed{\delta\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{0{,}05}{7{,}8} = 0{,}65\cdot 10^{-2}}$$

$$\delta E = \sqrt{(4\delta L)^2 + (2\delta f_p)^2 + (2\delta D)^2 + (\delta\rho)^2} = \sqrt{1{,}2^2 + 0{,}14^2 + 0{,}49^2 + 0{,}65^2}\cdot 10^{-2} = 1{,}46\cdot 10^{-2}$$

$$\boxed{\Delta E = \delta E\cdot\overline{E} = 1{,}46\cdot 10^{-2}\cdot 1{,}96\cdot 10^{11} = 0{,}028\cdot 10^{11}}\ \text{Па}$$

Значение модуля Юнга: $\boldsymbol{E} = (1{,}96 \pm 0{,}03)\cdot 10^{11}$ Па

11. ***График*** зависимости амплитуды колебаний стержня от частоты вынуждающей силы (построен на основании табл.3): см. Приложение 2.

12. *Окончательные результаты*.

$\boldsymbol{f_p} = (160{,}70 \pm 0{,}11)$ Гц $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{E} = (196 \pm 3)\cdot 10^9$ Па

13. *Вывод и анализ результатов работы*.

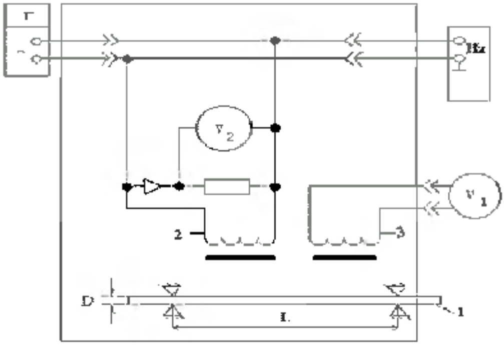
Поскольку табличное значение модуля Юнга $\boldsymbol{E}_{табл} = 200\cdot 10^9$ Па не попадает в доверительный интервал измеренного значения с доверительной вероятностью 68%, то следует сделать вывод, что результат измерения не совпадает с табличным значением. Вместе с тем различие результатов невелико. Это может свидетельствовать как о неточности проведенных измерений (недостаточное число измерений), так и о том, что табличное значение модуля Юнга соответствует не той марке стали, из которой изготовлен стержень. Данные по значениям модуля Юнга, взятые из справочника ("Справочник по элементарной физике", Н.И.Кошкин, М.Г.Ширкевич) показывают, что модуль Юнга стали может принимать значение от 170 ГПа до 206 ГПа. Полученный нами доверительный интервал попадает в этот диапазон значений, что может свидетельствовать о достоверности результатов измерения, а также о надежности использованного экспериментального метода и стабильной работе лабораторной установки. Для окончательного решения вопроса о надежности полученного результата требуются дополнительные измерения.

14. *Дополнительные задания*.

15. *Выполнение дополнительных заданий*.

16. *Замечания преподавателя*.

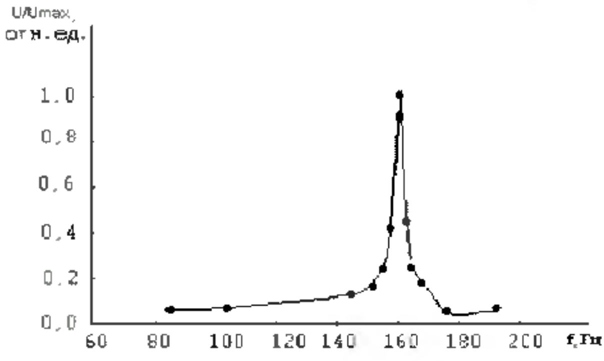
<u>Приложение 1</u>. Схема установки.



Пояснения к схеме:

- исследуемый стальной стержень (1), лежащий на двух опорах,
- электромагнит (2) со схемой контроля напряжения на нем и генератор (Г) для варьирования частоты колебаний стержня,
- частотомер (Hz) для измерения частоты колебаний, задаваемых с помощью генератора,
- измерительная катушка (3) с намагниченным сердечником и милливольтметр (V_1) для оценивания относительной амплитуды колебаний стержня.

<u>Приложение 2</u>. График экспериментальной зависимости амплитуды колебаний стержня от частоты вынуждающей силы (по данным табл.3).



Агапьев Борис Дмитриевич, *Козловский* Виталий Васильевич

ПРАКТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Учебное пособие

Подписано в печать . . 	Объем в п.л.
Тираж 	Заказ №

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного авторами.
АЦЗТ 	ПД №